Hausarbeit Fach: Geometrie

Der Goldene Schnitt

„Proportionen in Kunst und Natur“

Unterrichtsskizzen für die 8. Klasse

Gliederung:

Einführung

Teil I

Der Goldene Schnitt
Geometrisch-mathematischer Inhalt

Teil II

Menschenkundliche Grundgedanken

zur Entwicklung der Schüler des 8. Schuljahres und der daher empfohlenen pädagogisch-didaktischen Unterrichtsmethoden

Der Geometrieunterricht in der 8. Klasse

Teil III

Skizzenhafte Planung einer 3-wöchigen Geometrieunterrichtsepoche in der 8. Klasse Zum Thema „Der Goldene Schnitt“

1. Woche
2. Woche
3. Woche

Fazit

Katzenpastete
von J.W. Goethe

Bewährt den Forscher der Natur
Ein frei und ruhig Schauen,
So folge Messkunst seiner Spur
Mit Vorsicht und Vertrauen.

Zwar mag in Einem Menschenkind
Sich beides auch vereinen;
Doch, dass es zwei Gewerbe sind,
Das lässt sich nicht verneinen.

Natur und Kunst
von J.W. Goethe

Natur und Kunst, sie scheinen sich zu fliehen
Und haben sich, eh man es denkt, gefunden;
Der Widerwille ist auch mir verschwunden,
Und beide scheinen gleich mich anzuziehen.

Es gilt wohl nur ein redliches Bemühen!
Und wenn wir erst in abgemessnen Stunden
Mit Geist und Fleiß uns an die Kunst gebunden,
Mag frei Natur im Herzen wieder glühen.

So ists mit aller Bildung auch beschaffen:
Vergebens werden ungebundne Geister
Nach der Vollendung reiner Höhe streben.

Wer großes will, muss sich zusammenraffen;
In der Beschränkung zeigt sich erst der Meister,
Und da Gesetz nur kann uns Freiheit geben.

Wenn nicht mehr Zahlen und Figuren
Von Novalis

Wenn nicht mehr Zahlen und Figuren
Sind Schlüssel aller Kreaturen
Wenn die so singen, oder küssen,
Mehr als die Tiefgelehrten wissen,
Wenn sich die Welt ins freie Leben
Und in die Welt wird zurück begeben,
Wenn dann sich wieder Licht und Schatten
Zu echter Klarheit wieder gatten,
Und man in Märchen und Gedichten
Erkennt die wahren Weltgeschichten,
Dann fliegt vor einem geheimen Wort
Das ganze verkehrte Wesen fort.

Einführung

Meine Hausarbeit ist eine Unterrichtsskizze für den Geometrieunterricht der 8. Klasse einer Waldorfschule.
Mathematisch/geometrisch, also inhaltlich geht es um proportionale Verhältnisse, insbesondere um den „Goldenen Schnitt“.
Das Verstehen des Goldenen Schnittes soll vom Anfassen, Beobachten, Nachmessen über das Konstruieren bis hin zum klaren Erfühlen und Einschätzen geübt werden, so dass unvoreingenommenes Beobachten, bewegliches Denken und klares Empfinden in den Schülern angelegt ist.

Das geometrische Thema soll durch punktuelle Schlaglichter aus Geschichte, Natur und Kunst, Marketing und Propaganda eingerahmt und erweitert werden um den Schülern die Bedeutung der geometrischen Thematik in verschiedenen konkreten Kontexten darzustellen.

Die pädagogisch-didaktische Grundlage meiner Unterrichtsgestaltung fußt auf „Rudolf Steiners Lehrplan für die Waldorfschulen“ von E. A Stockmeyer und dem Buch „Pädagogischer Auftrag und Unterrichtsziele – vom Lehrplan der Waldorfschule“ Herausgegeben von Tobias Richter.

Teil I

Der goldene Schnitt
Geometrisch-mathematischer Inhalt

Da es heute Informationen über (fast) alle Themen im Internet gibt, halte ich es für vertretbar die Grundlagen des geometrisch-mathematischen Inhalts Quellen aus dem Internet zu entnehmen. (Quellen: s. Literaturliste am Ende des I. Teils)

Der Goldene Schnitt

Der Goldene Schnitt (lat. sectio aurea) ist ein bestimmtes Verhältnis zweier Zahlen oder Größen:
Zwei Strecken stehen im Verhältnis des Goldenen Schnittes, wenn sich die größere zur kleineren verhält wie die Summe aus beiden zur größeren.

Der Wert beträgt etwa 1,618. Streckenverhältnisse im Goldenen Schnitt werden in der Kunst und Architektur oft als ideale Proportion und als Inbegriff von Ästhetik und Harmonie angesehen. Darüber hinaus tritt das Verhältnis auch in der Natur in Erscheinung und zeichnet sich durch eine Reihe interessanter mathematischer Eigenschaften aus. Weitere verwendete Bezeichnungen sind stetige Teilung und göttliche Teilung (lat. proportio divina).

Teilung einer Strecke im Verhältnis des Goldenen Schnittes: a verhält sich zu b wie a+b zu a.

Proportion

Der Begriff "Proportionen" leitet sich vom lateinischen "proportio" ab, welches das "entsprechende Verhältnis" von Dingen zueinander bezeichnet, welche zueinander in einer Beziehung stehen. In den meisten Fällen, wie in der Architektur, regeln Proportionen Verhältnisse der Formen und Maße zueinander.

Definition und Goldene Zahl

Das Rechteck mit den Seiten a und b entspricht genau dann dem Goldenen Schnitt, wenn das auch für das Rechteck mit den Seiten a+b und a der Fall ist. Ein Goldenes Rechteck lässt sich daher stets in ein kleineres, ebenfalls Goldenes, und ein Quadrat zerlegen.

Das Verhältnis wird meist mit dem griechischen Buchstaben Φ (Phi) bezeichnet und Goldene Zahl genannt.

Bezeichnet man die längere Strecke mit a und die kürzere mit b, dann gilt damit

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$$

Daraus ergibt sich für das Verhältnis a zu b

$$\Phi = \frac{a}{b} = \frac{(1 + \text{Wurzel } 5)}{2} = 1{,}618033988\ldots$$

Die Zahl Φ ist eine irrationale Zahl, das heißt, sie lässt sich nicht durch ein Verhältnis zweier ganzer Zahlen darstellen. In einem bestimmten Sinne ist Φ die „irrationalste" aller Zahlen (siehe unten). Sie lässt sich vergleichsweise schlecht durch ein Verhältnis zweier ganzer Zahlen annähern. Das trägt wesentlich zu ihrer Bedeutung in der Natur und möglicherweise auch in der Kunst bei. Allerdings ist Φ eine algebraische Zahl und nicht, wie z.B. die Kreiszahl π oder die eulersche Zahl e, transzendent.
Subtrahiert man die kürzere der beiden Strecken von der längeren, so erhält man eine noch kürzere Strecke, zu der die mittlere der drei Strecken wiederum im Verhältnis des Goldenen Schnittes steht. Das folgt unmittelbar aus der obigen Definition, wenn man ausgehend von der Strecke a+b die Strecke b abzieht. Die Bezeichnung stetige Teilung bezieht sich auf den Umstand, dass dieser Vorgang beliebig oft wiederholbar ist und dabei stets das selbe Verhältnis liefert.

Goldener Schnitt (stetige Teilung)

Der Goldene Schnitt ist eine Proportion, bei der sich die Teilung einer Strecke AB so verhält, dass sie sich zu ihrem größten Teilungsabschnitt AC so verhält, wie dieser (AC) zum kleineren Teilungsabschnitt CB - dann ist AB:AC = AC:CB = ca. 1,622.

Geometrische Betrachtung

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Als Konstruktionsverfahren betrachtet man in der Geometrie nur diejenigen Verfahren, die sich auf die Verwendung von Zirkel und Lineal beschränken. Für die Teilung einer Strecke im Verhältnis des Goldenen Schnittes gibt es eine Fülle derartiger Verfahren. Hier seien exemplarisch einige erwähnt. Das folgende Verfahren ist wegen seiner Einfachheit beliebt.

Errichte auf der Strecke AB im Punkt B eine Senkrechte der halben Länge von AB mit dem Endpunkt C.
Der Kreis um C mit dem Radius schneidet die Verbindung AC im Punkt D.
Der Kreis um A mit dem Radius teilt die Strecke AB im Verhältnis des Goldenen Schnittes.

Innere Teilung
Verfahren nach Euklid
Die folgende Vorschrift geht auf Euklid zurück.
Errichte auf der Strecke AB im Punkt A eine Senkrechte der halben Länge von AB mit dem Endpunkt C.
Der Kreis um C mit dem Radius schneidet die Verlängerung von AC im Punkt D.
Der Kreis um A mit dem Radius teilt die Strecke AB im Verhältnis des Goldenen Schnittes.

Bei diesen beiden Beispiel spricht man von einer inneren Teilung der Ausgangsstrecke AB.

Im Folgenden zwei Beispiele für eine **äußere Teilung**, bei der der zu konstruierende Punkt außerhalb der Ausgangsstrecke liegt.
Klassisches Verfahren mit äußerer Teilung
Errichte auf der Strecke AS im Punkt S eine Senkrechte der Länge mit dem Endpunkt C.
Konstruiere die Mitte M der Strecke AS.
Der Kreis um M mit dem Radius schneidet die Verlängerung von AS im Punkt B. S teilt AB im Verhältnis des Goldenen Schnittes.

Äußere Teilung
Konstruktion nach Odom
Das folgende Konstruktionsverfahren wurde erst 1982 von dem amerikanischen Mathematiker George Odom entdeckt.
Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck.
Konstruiere den Umkreis, also den Kreis, der durch alle Ecken des Dreiecks verläuft.
Halbiere zwei Seiten des Dreiecks in den Punkten A und S.
Die Verlängerung von AS schneidet den Kreis im Punkt B. S teilt AB im Verhältnis des Goldenen Schnittes.
Beginnt man mit der Strecke AS, so konstruiert man über der halben Strecke das in S rechtwinklige Dreieck mit dem Umkreismittelpunkt (Höhe: AS/2, 2. Kathete: AS)

Goldener Zirkel
Künstler und Handwerker benutzten im 19. Jahrhundert zur Konstruktion beziehungsweise zur Überprüfung des Goldenen Schnittes einen Goldenen Zirkel. Er bestand etwa aus einem Zirkel, dessen beide Schenkel x-förmig nach oben zu einem zweiten Zirkel verlängert waren, und dessen Schenkellängen so gewählt waren, dass das Verhältnis der beiden eingestellten Abschnitte den Goldenen Schnitt bildete. Andere Instrumente hatten die Form eines Storchschnabels.

Das Pentagramm

Im regelmäßigen Fünfeck lassen die sich schneidenden Diagonalen einen Goldenen Schnitt entstehen - die geometrische Weiterführung endet im Pentagramm.

Das regelmäßige Fünfeck steht somit in enger Verbindung zum Goldenen Schnitt - zur harmonischsten der Proportionen, welche sich seltsamer Weise auch wieder in der belebten Materie wieder findet, so etwa im Aufbau vieler Blüten (Rosengewächse). In der unbelebten Natur findet sich das Fünfeck kaum - die Kristallographie kennt das Dreieck, das Viereck, das Sechseck, aber nicht das Fünfeck!

Das Pentagramm, eines der ältesten magischen Symbole der Kulturgeschichte, steht in einer besonders engen Beziehung zum Goldenen Schnitt.

Faltet man einen Papierstreifen nach Art eines Überhandknotens, so entstehen Strecken im Verhältnis des Goldenen Schnittes.

Zu jeder Strecke und Teilstrecke im Pentagramm findet sich ein Partner, der mit ihr im Verhältnis des Goldenen Schnitts steht. Im Prinzip ist es in das verkleinerte Pentagramm fortsetzbar, das man in das innere Fünfeck zeichnen könnte, und damit auch in alle weiteren. Stünden die beiden Strecken in einem Verhältnis ganzer Zahlen, müsste dieses Verfahren der fortgesetzten Subtraktion irgendwann Null ergeben und damit abbrechen. Die Betrachtung des Pentagramms zeigt aber anschaulich, dass das nicht der Fall ist.

Für den Beweis, dass es sich um den Goldenen Schnitt handelt, beachte man, dass neben den vielen Strecken, die aus offensichtlichen Symmetriegründen gleich lang sind, auch CD = CC´ gilt. Ursache ist, dass das Dreieck DCC' zwei gleiche Winkel besitzt, wie man durch Parallelverschiebung der Strecke CC' erkennen kann, und daher gleichschenklig ist. Nach dem Strahlensatz gilt:

$$\frac{AB}{BB`} = \frac{AC}{CC´}$$

Ersetzt man AC = AB + BC und beachtet die Gleichheit der auftretenden Teilstücke, so erhält man genau die obige Definitionsgleichung für den Goldenen Schnitt.

Verwendung des Symbols in der Geschichte [Bearbeiten]

Sinn und Ursprung

Das natürliche Abbild des Pentagramms ist der fünfzackige Stern, im Kerngehäuse (engl. core), der sich beim **(Quer-)Schnitt durch den Apfel** offenbart. Es versinnbildlicht die griechische Göttin Kore, die im Herzen der Erdmutter (Demeter) ruht. Die jungfräulichen Göttinnen wurden u.a. in Anatolien als 'Hebe' in Assyrien als 'Eveh' verehrt. Diese Namensähnlichkeit mit der biblischen 'Eva' ist sicher nicht zufällig, zumal sie (jungfräuliche Göttin) in Babylon als 'göttliche Herrin Edens' verehrt wurde.

Das Pentagramm ist das **Symbol der Venus**, sowohl des Planeten als auch der Göttin. Aufgrund des Verhältnisses der siderischen Umlaufzeiten von Erde (365,256 d) und Venus (224,7 d) von sehr genau 13 zu 8, umläuft der Planet Venus in acht (Erd-)Jahren nahezu exakt dreizehn mal die Sonne. Während dieser Zeitspanne begegnen sich Venus und Erde (untere Konjunktion) genau fünf Mal. Die Positionen der Konjunktionen liegen, eingetragen in ein Polarkoordinatensystem und beginnend bei 0°, nacheinander bei 144°, 288°, 72°, 216° und wieder 0°. So bilden die „himmlischen" Begegnungspunkte von Erde und Venus im Zeitraum von acht Jahren ein nahezu perfektes Fünfeck. Verbindet man die fünf Begegnungspunkte in chronologischer Reihenfolge, so ergibt sich ein Pentagramm am Sternenhimmel. Oftmals wird vermutet, dass die Griechen ihre Olympischen Spiele nach diesem Zyklus ausgerichtet haben. Symbol der Göttin Venus ist das Pentagramm aufgrund seiner fünf Ecken, die eine Analogie zur fünfblättrigen Rose gestattet. Das Symbol wurde auf einem Krug aus der mesopotamischen Djemdet-Nasr-Zeit, d.h. aus der zweiten Hälfte des 4. Jahrtausends, als Ideogramm der sumerischen Göttin Inanna/Ishtar gefunden.

Um 3000 v. Chr. tauchte das Symbol in Mesopotamien als Piktogramm für „Ecke" oder „Winkel" auf. Pythagoras kannte das Pentagramm als Symbol für Gesundheit. Ihn interessierte daran besonders dessen mathematischer Aspekt. **Mathematisch ist das Pentagramm die Grundlage des Goldenen Schnitts.** Da man das Symbol in einem Zug zeichnen kann und am Schluss wieder zum Anfang gelangt, galt es auch als Zeichen für den Kreislauf des Lebens. Abraxas, Gott der Gnostiker, wurde ebenfalls mit einem Pentagramm symbolisiert, weil er fünf Urkräfte in sich vereint.

Das Pentagramm mit seinem goldenen Schnitt und damit dem Zahlenverhältnis für Schönheit wurde zur Grundlage vieler Kirchenbauten. So kam es von den Kathedralenbauhütten zu den Freimaurerlogen. Den Freimaurern dient das Pentagramm als übergeordnetes Sternen-Symbol auf deren Arbeitsteppichen. Es gilt als geometrisches **Zeichen für die fünfte Wissenschaft der heiligen Geometrie** und ist damit ein **Sinnbild der Vernunft, des Maßes und des Wahrheit suchenden Geistes.** Seine fünf Spitzen weisen auf die Tugenden der Klugheit, der Gerechtigkeit, der Stärke, der Mäßigkeit und des Fleißes hin. Der Flammende Stern ist ein weiteres freimaurerisches Pentagramm. Es umgibt eine Gloriole und enthält zentral den Buchstaben G (Identische Bedeutung.). In mittelalterlicher und nachmittelalterlicher Zeit galten Pentagramme als Zaubercharaktere und Abwehrzeichen gegen Dämonen und Druden und wurden von der katholischen Kirche benutzt, es stellte auch die fünf Wunden Jesu Christi dar.

Im Volksglauben gilt das Pentagramm als Bannzeichen gegen das Böse. Vergleiche Goethes, Faust I, Studierzimmer, Faust zu Mephisto: „Das Pentagramma macht dir Pein?". Im Volksglauben hinderte ein Pentagramm, auf die Türschwelle gezeichnet, böse Geister daran, sie zu überwinden. Ebenso als magisches Zeichen in Otfried Preußlers „Krabat".

Heutzutage sind viele dieser Bedeutungen großen Teilen der Bevölkerung nicht mehr geläufig.

Drudenfuß
Das Pentagramm steht normalerweise auf zwei Spitzen, bei dem Drudenfuß, auch Alfenfuß genannt, weist eine Spitze jedoch nach unten (siehe Bild rechts). Der Name stammt vom Glauben, dass Druden, nächtliche Kobolde, einen Fußabdruck hinterlassen, der in etwa dem Pentagramm gleicht. Bisweilen wird im Vogelfuß der Druden der Ursprung der Form des Pentagramms gesehen.

Die Zahl Fünf in der Natur
Der Seestern bildet ein natürliches Pentagramm.
Die Zahl 5 und ihr geometrisches Symbol das Fünfeck als auch das Pentagramm gehören zum Form bestimmenden Prinzip der organisch belebten Natur. Die fünf Finger der menschlichen Hand und aller Landwirbeltiere zeigen einen fünfstrahligen Aufbau ihrer Endglieder, auch wenn man es manchmal, wie bei den Huftieren, nicht auf den ersten Blick sieht. Schneidet man einen Apfel quer durch, sieht man ein Fünfeck. Die meisten Blüten sind Fünfsterne, ebenso der Seestern. „Natürliche Pentagramme" finden sich auch bei fünfblättrigen Pflanzen wie der Lilie oder dem Weinstock. Wer eine Rosenblüte geometrisch ideal konstruiert, geht vom Fünfstern aus.

Verwendung
Leonardo da Vincis Proportionsstudie nach dem goldenen Schnitt in „La divina proportione" von Luca Pacioli, 1492

Bei den Sternen auf den Flaggen der USA, EU und vieler weiterer Länder handelt es sich um auf Pentagrammen basierende Sterne oder Pentagramme. Das gleiche ist der Fall beim Sowjetstern oder Roten Stern, welcher das Pentagramm in Anlehnung an eine Zeichnung von Leonardo da Vinci als Abbild des Menschen darstellt (Propotionsstudie nach Vitruv). Weiterhin findet sich das Pentagramm im Hoheitszeichen der United States Air Force, als Symbol des Islam und als Firmenzeichen der Automarke Chrysler, sowie der Ölfirma Texaco und zahlreichen anderen Firmen.

Eine Abstraktion des Pentagramms lässt sich heute noch an vielen Fensterrosetten von Kirchengebäuden gotischen Baustils sehen. An der Ostseite des Turms der Marktkirche Hannover ist ebenfalls ein Drudenfuß zu sehen. Weitere Deutungsmöglichkeiten für die fünf Ecken sind und waren der **Geist und die vier Elemente Feuer, Wasser, Erde und Luft oder auch Äther** und die vier Himmelsrichtungen Norden, Süden, Westen und Osten.

Der Karlsruher Stadtteil Knielingen sowie die Stadt Schlotheim in Thüringen tragen in ihren Wappen ebenfalls ein Pentagramm. Das afrikanische Land Marokko führt mittig ein Pentagramm in seiner Flagge.

Das Pentagramm findet sich im Gesellschaftssystem Pantokratie wieder. Dabei bezeichnen die fünf Ecken die Elemente Feuer, Erde, Wasser, Luft sowie Bewusstsein. Ein Pfeil, der sich aus dem Pentagramm erhebt, steht symbolisch für den Menschen, der sich über diese Elemente erhebt. Die fünf Ecken des Sternes werden als Lebenszeichen gedeutet. Das **Pentagramm stellt zudem auch den Grundaufbau vieler Blattarten** dar, vgl. Goldener Schnitt.

Manche Unabhängigkeitsbewegungen haben sich das Pentagramm als Symbol der Freiheit zueigen gemacht, so etwa in Katalonien. Eine katalanische Flagge mit einem Stern symbolisiert die bislang unerreichte Forderung nach Selbstbestimmung.

In manchen Strömungen des Okkultismus wird das Pentagramm mit der einen Spitze nach unten gezeichnet, um Spott gegenüber der katholischen Kirche auszuüben. Es soll ebenso wie das umgedrehte Kreuz auch eine "Umkehrung des Christlichen" (Antichrist) darstellen - wobei ein umgedrehtes Kreuz eigentlich ein Petruskreuz ist und damit keine Umkehrung darstellt. Siehe dazu auch das Zeichen des Leviathans (verziertes, umgedrehtes Pentagramm).

Bei Computerspielen steht ein meist in einem Kreis liegendes Pentagramm bereits seit den 1980er Jahren für Magie. Das heißt, es wird z.B. als Piktogramm bzw. Icon verwendet, das beispielsweise das Wirken von Zaubern auslöst oder dem Öffnen einer Liste mit erlernten oder den gesamten Zaubersprüchen im Spiel dient. Unter Umständen wird es auch mit Alchemie in Verbindung gebracht. Vor allem, wenn diese in dem Spielkonzept einer Art von Magie am nächsten kommt, das heißt, wenn keine Magie in Form von Zaubersprüchen zur Verfügung steht.

Goldenes Rechteck und Dreieck

Ein Rechteck, dessen Seitenverhältnis dem Goldenen Schnitt entspricht, bezeichnet man als Goldenes Rechteck. Ebenso nennt man ein gleichschenkliges Dreieck, bei dem zwei Seiten in diesem Verhältnis stehen, Goldenes Dreieck.

Goldener Winkel

Der Goldene Winkel $\Psi \approx 137{,}5°$

Eine bedeutende Rolle spielt der so genannte Goldene Winkel Ψ (Psi). Man erhält ihn, wenn man die 360° des Vollkreises im Verhältnis des Goldenen Schnittes teilt. Bezeichnet man den kleineren dieser Winkel als $\Psi 1$ und den größeren als $\Psi 2$, so ergibt sich

$$\Psi 2 \approx \frac{360°}{\Phi} \approx 222{,}5°$$

Da sich Winkel kleiner als 180° für die Praxis als handlicher erweisen, wird gewöhnlich der kleinere Winkel $\Psi 1$ als Goldener Winkel Ψ bezeichnet, das heißt

$$\Psi \approx 360° - \frac{360°}{\Phi} \approx 137{,}5°$$

Goldene Spirale

Man stelle sich ein Rechteck in den Proportionen des goldenen Schnittes vor. Wird nun die Fläche des Rechtecks immer wieder im Goldenen Schnitt geteilt entsteht in der geschwungenen Verbindung der Eckpunkte der ineinander liegenden

Rechtecke ein harmonisches Spiralenmuster, dessen Prinzipien nicht selten in den Lebensformen unseres Planeten wieder zu finden sind z.B. Spiralschnecken (Ammoniten, Tonnenschnecken, Seeohren) oder Schraubenmuster in der Anordnung von Sonneblumenkernen oder in Koniferenzapfen.

Goldener Schnitt im Ikosaeder

Drei Goldene Rechtecke im Ikosaeder

Die zwölf Ecken des Ikosaeders bilden die Ecken von drei gleich großen, senkrecht aufeinanderstehenden Rechtecken mit gemeinsamem Mittelpunkt und mit den Seitenverhältnissen des Goldenen Schnittes. Die Anordnung der drei Rechtecke heißt auch Goldener-Schnitt-Stuhl.

Einbeschreibungen

Alle Eckpunkte des einzubeschreibenden Polyeders sollen entweder Eckpunkte, Kantenmittelpunkte oder Flächenpunkte des Ausgangspolyeders sein.

12 Kantenzahl des Kubus = Flächenzahl des Dodekaeders

Ein Kubus kann dem Dodekaeder einbeschrieben werden, so dass jede der Dodekaederflächen eine Kubuskante enthält.

Analog folgt aus 12 Kantenzahl des Oktaeders = Eckenzahl des Ikosaeders, dass dem Oktaeder ein Ikosaeder einbeschrieben werden kann, so dass jeder der Oktaederkanten eine Ikosaederecke enthält. Die Oktaederkanten werden durch diese **im Goldenen Schnitt** geteilt.

6 Kantenzahl des Tetraeders = Flächenzahl des Kubus = Eckenzahl des Oktaeders
Ein Tetraeder lässt sich einem Kubus einbeschreiben, so dass jede Kante einer Flächendiagonale des Kubus entspricht. Dem Tetraeder kann ein Oktaeder einbeschrieben werden, so dass die Mittelpunkte der Tetraederkanten die Ecken des Oktaeders bilden.

Zwei weitere Einbeschreibungen sind etwas schwieriger zu finden: die des Ikosaeders in den Kubus und die eines Oktaeders in das Dodekaeder.

Goldener Schnitt im Ikosaeder

Drei Goldene Rechtecke im Ikosaeder:
Die zwölf Ecken des Ikosaeders bilden die Ecken von drei gleich großen, senkrecht aufeinander stehenden Rechtecken mit gemeinsamem Mittelpunkt und mit den Seitenverhältnissen des Goldenen Schnittes. Die Anordnung der drei Rechtecke heißt auch Goldener-Schnitt-Stuhl.

Goldener Schnitt

Der Goldene Schnitt (lat. sectio aurea) ist ein bestimmtes Verhältnis zweier Zahlen oder Größen:
Zwei Strecken stehen im Verhältnis des Goldenen Schnittes, wenn sich die größere zur kleineren verhält wie die Summe aus beiden zur größeren.

Der Wert beträgt etwa 1,618. Streckenverhältnisse im Goldenen Schnitt werden in der Kunst und Architektur oft als ideale Proportion und als Inbegriff von Ästhetik und Harmonie angesehen. Darüber hinaus tritt das Verhältnis auch in der Natur in Erscheinung und zeichnet sich durch eine Reihe interessanter mathematischer Eigenschaften aus. Weitere verwendete Bezeichnungen sind stetige Teilung und göttliche Teilung (lat. proportio divina).

Mathematische Eigenschaften

Herleitung des Zahlenwertes

In der mathematischen Literatur bezeichnet man den Goldenen Schnitt mit Φ, manchmal auch τ.

Aus der oben angegeben Definition folgt

und daraus die quadratische Gleichung
Φ2 − Φ − 1 = 0

mit den Lösungen

und

Letztere ist negativ. Der Zusammenhang ist interessant:

 ist also bis auf die erste Stelle zifferngleich mit Φ
 ist die algebraisch konjugierte Zahl zu Φ
Insbesondere folgt

Etliche mathematische Zusammenhänge lassen sich unter gleichzeitiger Verwendung von Φ und in besonders symmetrischer Weise schreiben.

Die Goldene Zahlenfolge

a 0 = 1

n	g
6	17,944
4	6,854
3	4,236
2	2,618
1	1,618
0	1,000
-1	0,618
-2	0,382
-3	0,236
-4	0,146
-6	0,056

Zu einer gegebenen Zahl a lässt sich die zugehörige kleinere Zahl b berechnen aus , die nächst größere . Da b eine Strecke der Länge a genauso „golden“ teilt, wie a die

Strecke a + b, berechnet sich die kleinere Teilung c = a − b von a zu und so fort, und analog für die größeren Zahlen.

Mit der Benennung und sowie ergibt sich für beliebige Zahlen a:
– die untere Folge
– die obere Folge

Oder, mit und
– die goldene Folge
Die goldene Folge ist eine Potenzfolge in Φ

Das erlaubt einfache Rechnungen:
Für ein beliebiges a ist also die untere Zahl und die obere Zahl (mit). Je drei beisammen stehende Zahlen der goldenen Folge ergeben einen goldenen Schnitt. Für eine gegebene Strecke der Länge a ergeben sich die beiden Teilstrecken des goldenen Schnitts zu und

Diese Folgen – und ihre diversen Differenz- und Summenfolgen – spielen insbesondere in der Proportionslehre in Kunst und Architektur eine wichtige Rolle, weil sich zu einen gegebenen Zahl andere „dazupassende" Zahlen einfach erzeugen lassen. Dadurch lassen sich auch Maße, die „weit auseinander liegen" (etwa die Fensterbreite zur Raumbreite) in Bezug setzen, und ganze Serien harmonischer Maße erstellen.

Zusammenhang mit den Fibonacci-Zahlen

Nenner	Zähler	Verhältnis	Abweichung zu Φ in %
1	1	1,000000	-38,1966
1	2	2,000000	23,6068
2	3	1,500000	-7,2949
3	5	1,666667	3,00566
5	8	1,600000	-1,11456
8	13	1,625000	0,43052
13	21	1,615385	-0,16374
21	34	1,619048	0,06265
34	55	1,617647	-0,02392
55	89	1,618182	0,00914
89	144	1,617977	-0,00349
144	233	1,618056	0,00133

In einem engen Zusammenhang zum Goldenen Schnitt steht die unendliche Zahlenfolge der Fibonacci-Zahlen:
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, …

die auf Leonardo da Pisa, genannt Fibonacci (13. Jahrhundert), zurückgeht. Die jeweils nächste Zahl in dieser Folge erhält man als Summe der beiden vorangehenden. Das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen strebt gegen den Goldenen Schnitt, ein Umstand, der bereits Johannes Kepler bekannt war.

Das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Zahlen der Fibonacci-Folge an strebt gegen den Goldenen Schnitt (siehe Tabelle). Das legt das rekursive Bildungsgesetz an + 1 = an + an − 1 nahe. Danach gilt
.

Sofern dieses Verhältnis gegen einen Grenzwert Φ konvergiert, muss daher für ihn gelten
.

Diese Beziehung gilt aber gerade für den Goldenen Schnitt, wie der Vergleich mit der ersten Gleichung des vorangehenden Abschnitts zeigt. Diese Argumentation gilt auch für verallgemeinerte Fibonacci-Folgen mit zwei beliebigen Anfangsgliedern. Wie die Tabelle zeigt, sind die Brüche abwechselnd größer und kleiner als der Goldenen Schnitt.

Die Glieder der Fibonacci-Folge lassen sich auch über die Formel von Binet berechnen:

Die Ganzzahligkeit der Folgenglieder ist dadurch gewährleistet, dass sich ungerade Potenzen von stets aufheben.

Der Goldene Schnitt als irrationalste und nobelste aller Zahlen

Der Goldene Schnitt ist eine irrationale Zahl, das heißt er lässt sich nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen. In einem gewissen Sinne erweist er sich als die irrationalste aller Zahlen, eine Eigenschaft, die für seine Rolle in der Botanik und möglicherweise auch in der Kunst von Bedeutung ist. Diese Eigenschaft äußert sich darin, dass sich der Goldene Schnitt vergleichsweise schlecht durch rationale Zahlen approximieren lässt. Das ist beispielsweise bei der ebenfalls irrationalen Kreiszahl π anders. Sie lässt sich durch den Bruch mit einer Abweichung von nur 0,04 % approximieren. Einen derartig geringen Fehler würde man im allgemeinen erst bei einem sehr viel größeren Nenner erwarten.

Der Goldene Schnitt lässt sich direkt aus der Forderung nach maximaler Irrationalität konstruieren. Um das zu verstehen, betrachte man das folgende Verfahren zur Approximation beliebiger Zahlen durch einen Bruch am Beispiel der Zahl π. Wir zerlegen diese Zahl zunächst in ihren ganzzahligen Anteil und einen Rest, der kleiner als 1 ist: π = 3 + Rest. Der Kehrwert dieses Restes ist eine Zahl, die größer als 1 ist. Sie lässt sich daher wiederum zerlegen in einen ganzzahligen Anteil und einen Rest kleiner 1: π = 3 + 1 / (7 + Rest). Verfährt man mit diesem Rest und allen folgenden ebenso, dann erhält man die so genannte unendliche Kettenbruchdarstellung der Zahl π

Man kann nun zeigen, dass man die Brüche, mit denen man eine Zahl optimal approximieren kann, genau dann erhält, wenn man ihre Kettenbruchentwicklung an irgendeiner Stelle abbricht. Je nach Abbruchstelle erhält man auf diese Weise für π die Zahlen 3, , , , …, die rasch gegen π streben. Für jeden einzelnen dieser Brüche gilt, dass es keinen Bruch mit einem kleineren Nenner gibt, der π besser approximiert.

Im obigen Kettenbruch erscheint vor jedem Pluszeichen eine ganze Zahl. Je größer diese Zahl ist, umso kleiner ist der Bruch, in dessen Nenner sie steht, und umso kleiner ist daher auch der Fehler, der entsteht, wenn der unendliche Kettenbruch vor diesem Bruch abgebrochen wird. Die größte Zahl im obigen Abschnitt des Kettenbruchs ist die 15. Das ist der Grund, warum eine derart gute Approximation für π darstellt.

In Umkehrung dieser Argumentation folgt nun, dass die Approximation besonders schlecht ist, wenn die Zahl vor dem Pluszeichen besonders klein ist. Die kleinste zulässige Zahl dort ist aber die 1. Der Kettenbruch, der ausschließlich Einsen enthält, hält daher von allen rationalen Zahlen maximal Abstand und ist in diesem Sinn die irrationalste aller Zahlen.

Für den Goldenen Schnitt gilt nun aber (siehe oben), woraus sich durch wiederholte Anwendung ergibt

Das heißt, der Goldene Schnitt Φ ist die irrationalste aller Zahlen. Bricht man diese Kettenbruchzerlegung an irgendeiner Stelle ab, so erhält man stets einen Bruch aus zwei aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen.

Zahlen, deren unendliche Kettenbruchdarstellung ab irgendeiner Stelle nur noch Einsen enthält, bezeichnet man als noble Zahlen. Der Goldene Schnitt ist damit auch die nobelste Zahl.

Weitere mathematische Eigenschaften
Aus Φ2 = 1 + Φ lässt sich folgende unendliche Kettenwurzel herleiten:

Das Quadrat Φ2 = Φ + 1 und jede höhere ganzzahlige Potenz von Φ lassen sich als Summe aus einem Vielfachen von Φ und einem Vielfachen von 1 darstellen. Auf dieser Eigenschaft beruht die fundamentale Bedeutung des goldenen Schnitts für quasiperiodische Gitter (siehe Quasikristall).
In der Trigonometrie gilt unter anderem

Dabei lässt sich als die Hälfte des Winkels in der Spitze des Pentagramms interpretieren und als die Hälfte des stumpfen Außenwinkels. Gelegentlich wird die Rolle des Goldenen Schnitts für das Fünfeck als vergleichbar bedeutend bezeichnet wie die der Kreiszahl π für den Kreis.
Der goldene Schnitt lässt sich auch mit Hilfe der Eulerschen Zahl und der hyperbolischen Areasinus-Funktion ausdrücken:

Der goldene Schnitt ist einer der drei Eigenwerte des optimal vorkonditionierten Systems bei Anwendung des PMINRES-Verfahrens zur iterativen Lösung eines großen dünnbesetzten linearen Gleichungssystems.

Geschichte

Hippasos von Metapont (um 450 v. Chr.), der dem **Geheimbund der Pythagoreer** angehörte, entdeckte bei seinen Untersuchungen am Fünfeck, dass das Verhältnis von Kantenlänge zu Diagonale nicht als Bruch ganzer Zahlen darstellbar ist. Dieses Ergebnis stand im Widerspruch zu der Überzeugung der Pythagoreer, dass die Welt sich vollständig durch ganze Zahlen beschreiben lässt. Ironischerweise fand sich nun die Widerlegung dieser Ansicht ausgerechnet im Pentagramm, dem Symbol der Pythagoreer. Hippasos entdeckte damit das Phänomen der irrationalen Zahlen anhand der Inkommensurabilität von Strecken, sowie zwei Größen, die im Verhältnis des Goldenen Schnittes stehen. Unbestätigten Berichten zufolge verbreitete er seine Entdeckung entgegen den Regeln seines Geheimbundes in der Öffentlichkeit und wurde daher zur Strafe ertränkt.

Die erste genaue Beschreibung des Goldenen Schnittes stammt von **Euklid (um 300 v. Chr.)**, der darauf über seine Untersuchungen an den platonischen Körpern und dem Fünfeck beziehungsweise dem Pentagramm stieß. Seine Bezeichnung für dieses Teilungsverhältnis wurde später als **„proportio habens medium et duo extrema“** übersetzt, was heute als **„Teilung im inneren und äußeren Verhältnis“** bezeichnet wird.

Später beschäftigte sich der **Franziskanermönch Luca Pacioli di Borgo San Sepolcro (1445–1514)**, der an der Universität von Perugia Mathematik lehrte, mit Euklids Arbeiten. Er nannte diese Streckenteilung Göttliche Teilung, was sich auf Platons Identifizierung der Schöpfung mit den fünf platonischen Körpern bezog, zu deren Konstruktion der Goldene Schnitt ein wichtiges Hilfsmittel darstellt. Sein gleichnamiges Werk **„De Divina Proportione“** von 1509 besteht aus drei unabhängigen Büchern. Bei dem ersten handelt es sich um eine rein mathematische Abhandlung, die jedoch keinerlei Bezug zur Kunst und Architektur herstellt. Das zweite ist ein kurzer Traktat über die Schriften des Römers Vitruv aus dem 1. Jahrhundert v. Chr. zur Architektur, in denen Vitruv die Proportionen des menschlichen Körpers als Vorlage für Architektur darstellt. Dieses Buch enthält eine Studie von Leonardo da Vinci (1452-1519) über den vitruvianischen Menschen. Das Verhältnis von Quadratseite zu Kreisradius in diesem berühmten Bild entspricht mit einer Abweichung von 1,7% dem Goldenen Schnitt, der jedoch im zugehörigen Buch gar nicht erwähnt wird. Darüber hinaus würde man diese Abweichung bei einem konstruktiven Verfahren nicht erwarten.

Die erste bekannte Berechnung des Goldenen Schnitts als „ungefähr 1,6180340“ schrieb der Tübinger Professor **Michael Maestlin 1597** in einem Brief an seinen früheren Schüler Johannes Kepler.

In Abhandlungen verschiedener Autoren im 19. Jahrhundert, insbesondere von dem **Philosophen Adolf Zeising**, wurden diese beiden Schriften zu der These kombiniert, Pacioli hätte in der „De Divina Proportione” in Zusammenarbeit mit Leonardo da Vinci einen Zusammenhang zwischen Kunst und Goldenem Schnitt hergestellt und damit seine Wiederentdeckung für die Malerei der Renaissance begründet. Zeising war von der Existenz eines Naturgesetzes der Ästhetik überzeugt, dessen Basis der Goldene Schnitt sein müsse. Er suchte und fand den Goldenen Schnitt überall. Seine Schriften verbreiteten sich rasch und begründeten eine wahre Euphorie bezüglich des Goldenen Schnitts. Andererseits zeigt eine Literaturanalyse, dass vor Zeising niemand in den Werken der Antike oder Renaissance den Goldenen Schnitt zu erkennen glaubte. Entsprechende Funde sind daher heute unter Kunsthistorikern eher umstritten.

Die Bezeichnung Goldener Schnitt wurde erstmals 1835, nur wenige Jahre zuvor, von Martin Ohm (1792–1872; Bruder von Georg Simon Ohm) in einem Lehrbuch der Mathematik verwendet. Auch die Bezeichnung sectio aurea entstand erst in dieser Zeit.

Gustav Theodor Fechner, ein Begründer der experimentellen Psychologie, stellte 1876 bei Untersuchungen mit Versuchpersonen anhand von Rechtecken in der Tat eine Präferenz für den Goldenen Schnitt fest. Die Ergebnisse bei der Streckenteilung und bei Ellipsen fielen jedoch anders aus. Neuzeitliche Untersuchungen zeigen, dass das Ergebnis solcher Experimente stark vom Kontext der Darbietung abhängt. Fechner fand ferner bei Vermessungen von Bildern in verschiedenen Museen Europas, dass die Seitenverhältnisse im Hochformat im Mittel etwa 4:5 und im Querformat etwa 4:3 betragen und sich damit deutlich vom Goldenen Schnitt unterscheiden.

Anfang des 20. Jahrhunderts fanden die Schriften des Rumänen **Matila Costiescu Ghyka (1927)** zum Goldenen Schnitt Beachtung, der den religiösen Aspekt von Pacioli mit dem ästhetischen von Zeising verband. Er interpretierte den Goldenen Schnitt als fundamentales Geheimnis des Universums und führte dazu vor allem Beispiele in der Natur an.

Ende des 20. Jahrhunderts suchte die **Kunsthistorikerin Marguerite Neveux** mit röntgenanalytischen Verfahren unter der Farbe von Originalgemälden, die angeblich den Goldenen Schnitt enthalten, vergeblich nach entsprechenden Markierungen oder Konstruktionsspuren.

Die Bedeutung des goldenen Schnitts

Vergleich mit anderen Teilungsverhältnissen

Ein möglicher Grund für die Beliebtheit des Goldenen Schnittes ist in seinem hohen Grad an Irrationalität zu sehen. Das bedeutet, dass er sich von allen Verhältnissen kleiner ganzer Zahlen, wie beispielsweise 2 : 3 oder 3 : 4, deutlich abhebt, was in bestimmten ästhetischen Zusammenhängen erwünscht sein kann. Möglicherweise wurde und wird er oft auch unbewusst und ohne exakte Maßkontrolle intuitiv gewählt.

Papier- und Bildformate

Im Buchdruck wurde früher gelegentlich die Nutzfläche einer Seite, der so genannte Satzspiegel, so positioniert, dass das Verhältnis von Bundsteg zu Kopfsteg zu Außensteg zu Fußsteg sich wie 2:3:5:8 verhielt. Diese Wahl von Fibonacci-Zahlen approximiert den Goldenen Schnitt.

Typische Einsatzgebiete:
4 : 3 - **Traditionelles Fernsehformat** und Ballenformat für Packpapier. In der Regel auch bei Computermonitoren verwendet (z. B. 1024 × 768 Pixel). Dieses Format geht zurück auf Thomas Alva Edison, der 1889 das Format des klassischen Filmbildes (35-mm-Film) auf 24 × 18 mm festlegte.

√2 : 1 - Das **Seitenverhältnis beim DIN-A4-Blatt** und verwandten DIN/EN/ISO-Maßen. Bei einer Halbierung durch einen Schnitt, der die längeren Seiten des Rechtecks halbiert, entstehen wiederum Rechtecke mit dem selben Seitenverhältnis.
3 : 2 - Seitenverhältnis beim Kleinbildfilm (36 mm × 24 mm).

Φ : 1 - Seitenverhältnis im Goldenen Schnitt. Entspricht dem **historischen Buchformat Oktav**. Hier approximiert durch 144 × 89 Pixel mit einem theoretischen Fehler von nur 5·10-5. Die beiden benachbarten Rechtecke weisen Seitenverhältnisse von aufeinander folgenden Fibonacci-Zahlen auf und approximieren daher ebenfalls den Goldenen Schnitt vergleichsweise gut.
5 : 3 - Findet neben dem noch breiteren 1 : 1,85 als Kinoformat Verwendung.
16 : 9 - Breitbildfernsehen.

Proportionslehre

Architektur

Frühe Hinweise auf die vermutlich unbewusste Verwendung des Goldenen Schnittes stammen aus der Architektur. Die Schriften des griechischen Geschichtsschreibers Herodot zur **Cheops-Pyramide** werden gelegentlich dahingehend ausgelegt, dass die Höhe der Seitenfläche zur Hälfte der Basiskante im Verhältnis des Goldenen Schnittes stünde. Die entsprechende Textstelle ist jedoch nur interpretierbar. Andererseits wird auch die These vertreten, dass das Verhältnis 2:π für Pyramidenhöhe zu Basiskante die tatsächlichen Maße noch besser wider spiegele. Der Unterschied beider Thesen beträgt 1,0 Promille.

Viele **Werke der griechischen Antike** werden als Beispiele für die Verwendung des Goldenen Schnittes angesehen wie beispielsweise die Vorderfront des 447–432 v. Chr. unter Perikles erbauten **Parthenon-Tempels** auf der Athener Akropolis. Da zu diesen Werken keine Pläne überliefert sind, ist nicht bekannt, ob diese Proportionen bewusst oder intuitiv gewählt wurden. Auch in späteren Epochen finden sich zahlreiche Beispiele für die goldene Proportion, wie etwa der **Dom von Florenz**, die **Notre Dame in Paris** oder die **Torhalle in Lorsch (770 n. Chr.)**. Es gibt jedoch keinen empirischen Nachweis für eine signifikant größere Häufigkeit des Goldenen Schnittes in diesen Epochen im Vergleich zu anderen Teilungsverhältnissen. Ebenso fehlen historische Belege für eine absichtliche Verwendung des Goldenen Schnitts.

Ein Beispiel für die bewusste Umsetzung des Goldenen Schnitts ist das **Alte Rathaus in Leipzig**, ein Renaissancebau aus den Jahren 1556/57. Der aus der Mittelachse gerückte Rathausturm galt als architektonische Avantgardeleistung der damaligen Zeit und stand mit dem dadurch verursachten Wirbel und Aufruhr für das städtische Selbstbewusstsein der Stadt. Auch dem **Stadtgrundriss** des nordhessischen **Bad Arolsen** liegt der Goldene Schnitt zugrunde. Er erstreckt sich vom Schloss über die gesamte, geplante Barockstadt. **Hier wurde der Goldene Schnitt allerdings dazu verwendet, die göttliche Ordnung auf Erden und damit die Erhabenheit des damaligen absolutistischen Fürsten aufzuzeigen.**

Der **Architekt und Maler Le Corbusier** (1887–1965) entwickelte ab 1940 ein einheitliches Maßsystem basierend auf den menschlichen Maßen und dem Goldenen Schnitt. Er veröffentlichte es 1949 in seiner Schrift Der Modulor, die zu den bedeutendsten Schriften der Architekturgeschichte beziehungsweise -theorie gezählt wird. Bereits 1934 wurde ihm für die Anwendung mathematischer Ordnungsprinzipien von der Universität Zürich der Titel doctor honoris causa der mathematischen Wissenschaften verliehen.

Bildkomposition

Überlagerung des Goldenen Schnittes mit einem Bild von Da Vinci

Inwieweit die Verwendung des Goldenen Schnittes in der Kunst zu besonders ästhetischen Ergebnissen führt, ist letztlich eine Frage der jeweils herrschenden Kunstauffassung. Für die generelle These, dass diese Proportion besonders ansprechend und harmonisch empfunden wird, gibt es keine gesicherten Belege. Viele Künstler setzten den Goldenen Schnitt bewusst ein, bei vielen Werken wurden Kunsthistoriker erst im Nachhinein fündig. Diese Befunde sind jedoch angesichts der Fülle von Kandidaten für den Goldenen Schnitt, wie man sie beispielsweise in einem reich strukturierten Gemälde finden kann, oft umstritten.

So werden zahlreichen **Skulpturen griechischer Bildhauer**, wie der Apollo von Belvedere, der Leochares (um 325 v. Chr.) zugeschrieben wird, oder Werke von Phidias (5. Jahrhundert v. Chr.) als Beispiele für die Verwendung des Goldenen Schnittes angesehen. Auf letzteren bezieht sich auch die heute oft übliche Bezeichnung Φ für den Goldenen Schnitt, die von dem amerikanischen Mathematiker Mark Barr eingeführt wurde. Die ebenfalls gelegentlich verwendete Bezeichnung τ bezieht sich dagegen auf das griechische Wort tome für „Schnitt”.

Der Goldene Schnitt wird auch in vielen **Gemälden der Renaissance** vermutet, wie bei Raffael, Leonardo da Vinci und Albrecht Dürer, zum Beispiel bei Dürers Selbstbildnis von 1500 und seinem Kupferstich Melencolia I von 1514.

Künstler der Neuzeit, die den Goldenen Schnitt bewusst einsetzten, sind beispielsweise Mondrian, Paul Signac und Georges Seurat, Hergé oder auch die Künstler der Section d'Or.

Auch in der **Fotografie** wird der Goldene Schnitt zur Bildgestaltung eingesetzt, wie beispielsweise von dem französischen Fotograf Henri Cartier-Bresson. Als Faustformel verwendet man hier die Drittel-Regel.

Akustik und Musik

Intervalle

In der Musik werden Töne als konsonant empfunden, wenn das Verhältnis ihrer Schwingungsfrequenzen ein Bruch aus kleinen ganzen Zahlen ist.

Tonleitern mit irrationalen Schwingungsverhältnissen, wie beispielsweise dem des Goldenen Schnittes, spielen daher allenfalls in der experimentellen Musik oder in speziellen Kulturkreisen eine Rolle.

Dass eine Annäherung dieses Verhältnisses zum Goldenen Schnitt hin nicht unbedingt zu einem wohlklingenden Intervall führt, lässt sich daran erkennen, dass unter den Tonintervallen, deren Schwingungsverhältnis aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen entspricht, höchstens die Quinte mit einem Schwingungsverhältnis von 3:2 herausragt. Die große Terz mit einem Schwingungsverhältnis von 5:4 wird schon als harmonischer empfunden als die große Sexte mit 5:3 und die kleine Sexte mit 8:5. Da ein Tonintervall im Goldenen Schnitt nur etwa 19 Cent größer ist als eine kleinen Sexte, ist es für ein wenig geschultes Ohr nur schwer von dieser zu unterscheiden (Audiobeispiel ?/i).

Komposition

Der Goldene Schnitt wird gelegentlich auch in Strukturkonzepten von Musikstücken vermutet. So hat der ungarische Musikwissenschaftler Ernö Lendvai versucht, den Goldenen Schnitt als wesentliches Gestaltungsprinzip der Werke Béla Bartóks nachzuweisen. Seiner Ansicht nach hat Bartók den Aufbau seiner Kompositionen so gestaltet, dass die Anzahl der Takte in einzelnen Formabschnitten Verhältnisse bilden, die den Goldenen Schnitt approximieren. Allerdings sind seine Berechnungen umstritten. Ferner gibt es für eine bewusste Verwendung des Goldenen Schnitts durch Bartók keine Belege.

Instrumentenbau

Der Goldene Schnitt wird gelegentlich im Musikinstrumentenbau verwendet. Insbesondere beim Geigenbau soll er für besonders klangschöne Instrumente bürgen. So wird auch behauptet, dass der berühmte Geigenbauer Stradivari den Goldenen Schnitt verwendete, um die klanglich optimale Position der F-Löcher für seine Violinen zu berechnen.

Vorkommen in der Natur

Biologie

Das spektakulärste Beispiel für die Realisierung des Goldenen Schnitts in der Natur findet sich bei der Anordnung von Blättern (Phyllotaxis) und in Blütenständen mancher Pflanzen. Bei diesen Pflanzen teilt der Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Blättern den Vollkreis von 360° im Verhältnis des Goldenen Schnittes, wenn man die beiden Blattwurzeln durch eine Parallelverschiebung eines der Blätter entlang der Pflanzenachse zur Deckung bringt. Es handelt sich um den Goldenen Winkel von etwa 137,5°. Das Sonnenlicht wird dadurch optimal genutzt.

Die daraus entstehenden Strukturen werden auch als selbstähnlich bezeichnet, insofern ein Muster auf einer tieferen Strukturebene sich in höheren Ebenen wieder findet.

Beispiele sind die **Sonnenblume, Kohlarten, Kiefernnadel an jungen Ästen, Zapfen, Agaven, viele Palmen- und Yuccaarten und die Blütenblätter der Rose**, um nur einige zu nennen.

Ursache ist das Bestreben dieser Pflanzen, ihre Blätter auf Abstand zu halten. Es wird vermutet, dass sie dazu an jeder Blattwurzel einen Inhibitor produziert, einen speziellen Wachstumshemmer, der im Pflanzenstamm vor allem nach oben, in geringerem Umfang aber auch in seitlicher Richtung diffundiert. Dabei bilden sich in verschiedene Richtungen bestimmte Konzentrationsgefälle aus. Das nächste Blatt entwickelt sich an einer Stelle des Umfangs, wo die Konzentration minimal ist. Dabei stellt sich ein bestimmter Winkel zum Vorgänger ein. Würde dieser Winkel den Vollkreis im Verhältnis einer rationalen Zahl m/n teilen, dann würde dieses Blatt genau in die gleiche Richtung wachsen wie dasjenige n Blätter zuvor. Der Beitrag dieses Blattes zur Konzentration des Inhibitors ist aber an dieser Stelle gerade maximal. Daher stellt sich ein Winkel mit einem Verhältnis ein, das alle rationalen Zahlen meidet. Die Zahl, die in diesem Sinne die irrationalste aller Zahlen ist, ist nun aber gerade der Goldene Schnitt. Da bisher kein solcher Inhibitor isoliert werden konnte, werden auch andere Hypothesen diskutiert, wie beispielsweise die Steuerung dieser Vorgänge in analoger Weise durch Konzentrationsverteilungen von Nährstoffen.

Der Nutzen für die Pflanze könnte darin bestehen, dass auf diese Weise **von oben einfallendes Sonnenlicht (bzw. Wasser und Luft) optimal genutzt wird,** eine Vermutung, die bereits Leonardo da Vinci äußerte, oder auch im effizienteren Transport der durch Photosynthese entstandenen Kohlenhydrate im Phloemteil der Leitbündel nach unten. Die Wurzeln von Pflanzen weisen den Goldenen Winkel weniger deutlich auf. Bei anderen Pflanzen wiederum treten Blattspiralen mit anderen Stellungswinkeln zutage. So wird bei manchen Kakteenarten ein Winkel von 99,5° beobachtet, der mit der Variante der Fibonacci-Folge 1, 3, 4, 7, 11, … korrespondiert. In Computersimulationen des Pflanzenwachstums lassen sich diese verschieden Verhaltensweisen durch geeignete Wahl der Diffusionskoeffizienten des Inhibitors provozieren.

Besonders beeindruckend sind Fibonacci-Spiralen in Blütenständen, wie beispielsweise bei Sonnenblumen. Pflanzenarchitektonisch entsprechen den einzelnen Samen Blätter, wobei jedes einzelne einem eigenen Kreis um den Mittelpunkt des Blütenstandes zugeordnet werden kann, so als hätte man einen Pflanzenstamm mit seinen Blättern wie ein Teleskop zusammen geschoben. Wachtumstechnisch aufeinander folgende Samen liegen daher räumlich weit auseinander, während direkte Nachbarn wieder einen Abstand entsprechend einer Fibonacci-Zahl haben. Im äußeren Bereich von Sonnenblumen zählt man 34 und 55 Spiralen, bei größeren Exemplaren 55 und 89 oder sogar 89 und 144. Die

Abweichung vom mathematischen Goldenen Winkel, die in diesem Fall nicht überschritten wird, beträgt weniger als 0,01 Prozent.

Der Goldene Schnitt lässt sich natürlich auch über radiärsymmetrische **fünfzählige Blüten** konstruieren wie beispielsweise bei der **Glockenblume, der Akelei und der (wilden) Heckenrose**. Der Abstand der Spitzen von Blütenblättern nächster Nachbarn zu dem der übernächsten steht wie beim regelmäßigen Fünfeck üblich in diesem Verhältnis. Das betrifft natürlich auch **Seesterne und andere Tiere mit fünfzähliger Symmetrie**.

(Kommentar: Könnte man anhand der Fotos von Karl Blossfeld und der Zeichnungen von Ernst Heckel mal nachmessen und rechnen.)

Goldener Schnitt im Efeublatt

Darüber hinaus wird der Goldene Schnitt auch im Verhältnis der Längen aufeinander folgender Stängelabschnitte mancher Pflanzen vermutet wie beispielsweise bei der **Pappel**. Auch im **Efeublatt** stehen die Blattachsen a und b ungefähr im Verhältnis des Goldenen Schnittes. Diese Beispiele sind jedoch umstritten.

Noch im 19. Jahrhundert war die Ansicht weit verbreitet, der Goldene Schnitt sei ein **göttliches Naturgesetz** und in vielfacher Weise auch in den **Proportionen des menschlichen Körpers** realisiert. So nahm Adolf Zeising in seinem Buch über die Proportionen des menschlichen Körpers an, dass der Nabel die Körpergröße im Verhältnis des Goldenen Schnitts teile, und der untere Abschnitt werde durch das Knie wiederum so geteilt. Ferner scheinen die Verhältnisse benachbarter Teile der Gliedmaßen wie beispielsweise bei Ober- und Unterarm sowie bei den Fingerknochen ungefähr in diesem Verhältnis zu stehen. Eine genaue Überprüfung ergibt jedoch Streuungen des Verhältnisses im 20-Prozent-Bereich. Oft enthält auch die Definition, wie beispielsweise die Länge eines Körperteils exakt zu bestimmen sei, eine gewisse Portion Willkür. Ferner fehlt dieser These bis heute eine wissenschaftliche Grundlage. Es dominiert daher weitgehend die Ansicht, dass diese Beobachtungen lediglich die Folge gezielter Selektion von benachbarten Paaren aus einer Menge von beliebigen Größen sind.

Bahnresonanzen

Seit langem ist bekannt, dass die Umlaufzeiten mancher Planeten und Monde in Verhältnis kleiner ganzer Zahlen stehen wie beispielsweise Jupiter und Saturn mit 2:5 oder die Jupitermonde Io, Ganymed und Europa mit 1:2:4. Derartige Bahnresonanzen stabilisieren die Bahnen der Himmelskörper langfristig gegen kleinere Störungen. Erst 1964 wurde entdeckt, dass auch hinreichend irrationale Verhältnisse, wie sie beispielsweise im Fall $1:\Phi$ vorliegen würden, stabilisierend wirken können. Derartige Bahnen werden KAM-Bahnen genannt, wobei die drei Buchstaben für die Namen der Entdecker Andrei Kolmogorow, V. I. Arnold und Jürgen Moser stehen.

Kristallstrukturen

Der Goldene Schnitt tritt auch bei den Quasikristallen der Festkörperphysik in Erscheinung, die 1984 von D. Shechtman und seinen Kollegen entdeckt wurden. Dabei handelt es sich um **Strukturen mit fünfzähliger Symmetrie**, aus denen sich aber, wie bereits Kepler erkannte, keine streng periodischen Kristallgitter aufbauen lassen, wie dies bei Kristallen üblich ist. Entsprechend groß war die Überraschung, als man bei Röntgenstrukturanalysen Beugungsbilder mit fünfzähliger Symmetrie fand. Diese Quasikristalle bestehen strukturell aus zwei verschieden rhomboedrischen Grundbausteinen, mit denen man den Raum zwar lückenlos, jedoch ohne globale Periodizität füllen kann (Penrose-Parkettierung). Beide Rhomboeder setzten sich aus den gleichen rautenförmigen Seitenflächen zusammen, die jedoch unterschiedlich orientiert sind. Die Form dieser Rauten lässt sich nun dadurch definieren, dass ihre Diagonalen im Verhältnis des Goldenen Schnittes stehen.

Informatik

In der Informatik speichert man Daten in Hashtabellen um darauf schnell zuzugreifen. Die Position h(k), an der ein Datensatz k in der Tabelle gespeichert wird, berechnet man durch eine Hashfunktion h. Für einen effizienten Zugriff müssen die Datensätze möglichst gleichmäßig verteilt in die Tabelle geschrieben werden. Eine Variante für die Hashfunktion ist die multiplikative Methode, bei der die Hashwerte für eine Tabelle der Größe m nach der folgenden Formel berechnet werden.

Dabei stellen Gaußklammern dar, die den Klammerinhalt auf die nächste ganze Zahl abrunden. Der angesehene Informatiker Donald E. Knuth schlägt als Wert für die frei wählbare Konstante A den Goldenen Schnitt vor, um eine gute Verteilung der Datensätze zu erhalten.

Literatur

Historische Literatur
Luca Pacioli: Divina Proportione. Venedig 1509. hg. und übers. von Constantin Winterberg, Wien: Verlag Carl Graeser 1888 Print on Demand.
Martin Ohm: Lehrbuch der gesamten höhern Mathematik. Band 2. Volckmar, Leipzig 1835, 1837.
Adolf Zeising: Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers. Leipzig 1854.
Adolf Zeising: Das Normalverhältniss der chemischen und morphologischen Proportionen. Weigel, Leipzig 1856.
Gustav Theodor Fechner: Zur experimentalen Ästhetik. Hirzel, Leipzig 1871.
Neuere Literatur
P. H. Richter, H.-J. Scholz: Der Goldene Schnitt in der Natur. In: Bernd-Olaf Küppers (Hrsg.): Ordnung aus dem Chaos. Piper, München 1991, ISBN 3-492-10743-5, S. 175–214. online (PDF, 18 MB)
Hans Walser: Der Goldene Schnitt. Teubner, Stuttgart 1993. ISBN 3-8154-2511-5.
Marguerite Neveux, H. E Huntley: Le nombre d'or – Radiographie d'un mythe. Seuil, Paris 1995, ISBN 2-02-025916-8.
Albrecht Beutelspacher, Bernhard Petri: Der Goldene Schnitt. Spektrum, Heidelberg, Berlin, Oxford 1996. ISBN 3-86025-404-9.
Roger Herz-Fischler: A mathematical History of the Golden Ratio. Dover Publications, New York 1998, ISBN 0-486-40007-7.
Jürgen Fredel: Maßästhetik. Studien zu Proportionsfragen und zum Goldenen Schnitt. Lit, Hamburg 1998, ISBN 3-8258-3408-5.
Thomas Koshy: Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. Wiley, New York 2001, ISBN 0-471-39969-8, S. 239–299.
Hans Walser: Der Goldene Schnitt. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2004, ISBN 3-937219-00-5.
S. King u. a.: On the mystery of the golden angle in phyllotaxis. In: Plant, cell & environment. Blackwell, Oxford 2004, S. 685–696, ISSN 0140-7791.
Klaus Podirsky: Fremdkörper Erde – Goldener Schnitt und Fibonacci-Folge und die Strukturbildung im Sonnensystem. Info-3-Verlag, Frankfurt am Main 2004, ISBN 3-924391-29-7.
Albert van der Schoot: Die Geschichte des goldenen Schnitts. Frommann-Holzboog, Stuttgart 2005, ISBN 3-7728-2218-5.
Ruben Stelzner: Der goldene Schnitt und das Mysterium der Schönheit. In: Tycho de Brahe Jahrbuch. Tycho-Brahe-Verlag, Niefern-Öschelbronn 2005, ISBN 3-926347-28-7 ISSN 0177-168X
Priya Hemenway: Divine Proportion. Phi in Art, Nature and Science. Sterling, New York 2005, ISBN 1-4027-3522-7.

http://www.lmg.pcom.de/faecher/goldsect.htm
http://www.khg.bamberg.de/comenius/gold/gauge/gsgauge.htm
http://home.fonline.de/fo0126//spiele/denk27.htm

Teil II

Menschenkundliche Grundgedanken

zur Entwicklung der Schülern des 8. Schuljahres und der daher empfohlenen pädagogisch-didaktischen Unterrichtsmethoden

Die Schüler einer 8. Klasse sind vornehmlich 14 oder 15 Jahre alt. Sie befinden sich in der Pubertät die sie stärker oder weniger stark ausgeprägt in ihren wechselhaften Gefühlen und Fragen ans Leben beschäftigt. Ihre Haltung zu sich selbst und zur Welt wandelt sich grundlegend. Sie stehen zwischen dem „Kind sein“ und dem „erwachsen werden“. Äußere, körperliche Veränderungen, ein oft verstärktes Längenwachstum und die Ausgestaltung der äußeren Geschlechtsmerkmale gehen mit inneren Verwandlungen einher und können den Heranwachsenden und auch seine Umgebung verunsichern.
Tobias Richter führt dazu aus: „Oft erschreckt ja die tumultartige Wucht der Ereignisse die Umgebung so, dass sie darüber vergisst, dass der Jugendliche ähnlich erschrocken ist. Dieses Erschrecken, das für ihn sehr tief und erschütternd sein kann, soll aber von der Umgebung unbemerkt bleiben, da er sich in diesem Neuland erst dann als Individualität zeigen möchte, wenn er Sicherheit erworben hat. Davor bleibt vieles Versteck, Verzauberung und Maske.“[1]
Neben dem körperlichen und seelisch-gefühlsmäßigen Wandel vollzieht sich im pubertierenden Jugendlichen auch ein geistiger, ein Wandel des Bewusstseins. „In verstärktem Masse beginnt sich nun das begriffliche Denken zu entwickeln, das bestrebt ist, Bezüge zwischen Einzelerscheinungen herzustellen, und damit aus der Vereinzelung, aus der Einsamkeit nach einer neuen Totalität greifen möchte.“ schreibt Tobias Richter. Das begründet die methodisch-didaktischen Unterrichtsempfehlungen von P. Buck und M. v. Mackensen die empfehlen: „Alles Erlebte muss in ursprüngliches Denken hinauf gehoben werden, sonst stumpft es ab und erzeugt nur Sensationslust. Nicht Strukturen und Ergebnisse der Fachwissenschaft sollen gepflegt werden, wohl aber die Grundfigur wissenschaftlichen Tuns: das zusammenschauende Denken“. [2]
Auch Steiner sagte dazu grundlegend: „Nicht der Abstrakte Begriff enthält die Wirklichkeit, wohl aber die denkende Beobachtung, die weder einseitig den Begriff noch die Wahrnehmung für sich betrachtet, sondern den Zusammenhang beider.“[3]
Auf diese Weise lässt sich die Entwicklung der im achten Schuljahr befindlichen Schüler aufgreifen und zur ersten Reife des Zusammenhänge erkennenden, denkenden Beobachtens führen. Richter resümiert: „Ein nach streng phänomenologischer Methode durchgeführter Anschauungsunterricht bietet hierfür durch das Erlernen forschenden Fragens einzigartige Möglichkeiten.“

---

[1] Tobias Richter, „Pädagogischer Auftrag und Unterrichtsziele – vom Lehrplan der Waldorfschule“, S. 60, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 2003
[2] P. Buck, M. v. Mackensen, „Naturphänomene erleben und verstehen“, S. 22
[3] Rudolf Steiner, „Die Philosophie der Freiheit“, GA 4, Dornach 1967, S. 197

Der Geometrieunterricht in der 8. Klasse

Die Geometrie als Teil der Mathematik wird in der Waldorfschule in gesonderten Epochen unterrichtet. In der 8. Klasse soll im Geometrieunterricht u. a. „das erlebnismäßige Kennenlernen des goldenen Schnittes im Zusammenhang mit den platonischen Körpern“[4] unterrichtet werden.

Als generellen Apel Rudolf Steiners zum Unterrichtsziel des Geometrieunterricht seien folgende zwei Zitate vorangestellt: „Es dürfen bei uns - in der Waldorfschule – die Lehrer nicht zufrieden sein, wenn die Kinder einen Kreis zeichnen können, sondern es müssen unsere Kinder den Kreis, das Dreieck, das Quadrat fühlen lernen. Sie müssen den Kreis so zeichnen, dass sie das Runde in der Empfindung haben. (…) Eine gefühlsmäßige Anschauungsweise soll es haben, ein gefühlsmäßiges Erleben der Dinge.“[5] „ Können wir uns aber jedes Dreieck vorstellen? Es wäre gut, wenn wir unseren Kindern einen beweglichen Begriff des Dreiecks beibrächten, nicht einen toten.“[6]

Über den Geometrieunterricht in der 6. bis 8. Klasse schreibt Tobias Richter:
„In der Geometrie ergibt sich die ästhetische Qualität des Zeichnens nun nicht mehr aus der Dynamik, sondern aus der Ordnung. Hierzu muss der Schüler den sachgemäßen Gebrauch von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck gründlich üben.“
Damit die Geometrie dadurch aber nicht als zu starr erlebt wird, soll der Lehrer die Schüler immer wieder zum Staunen bringen damit seelisches Interesse und Geist gleichermaßen angesprochen werden, sich ergänzen und so die Entwicklung des Zusammenhänge erkennenden, denkenden Beobachtens unterstützen.
Unterrichtsziel ist es aber auch die Entwicklung des Jugendlichen hin zu einer ordentlich, klar und frei denkenden Persönlichkeit zu unterstützen. So sagt Tobias Richter: „Geometrische Beweise zu entdecken bzw. diese im gemeinsamen Gespräch zu entwickeln regen das erwachende kausale Denken nicht nur an, sondern sind ihm Nahrung sowie Prüfstein. Die Formulierung der Beweise und Gesetze verlangt eine eigene, dem Gegenstand adäquate Form der Sprache. Eine solche zu erleben und handhaben zu lernen, die frei von Emotionalität ist und sich nur auf das, was ist, und nicht auf das, was sein soll, bezieht, ist für die Schüler auf der Suche nach ihrer individuellen Sprache und Ausdrucksform wichtig.“[7] Oder auch: „Wiederholendes und ständiges Üben von gezeichneten Beweisen ist Schulung der sich entwickelnden Urteilsfähigkeit und des Willens. (…) Im Geometrieunterricht soll der Schüler zunehmend zu exakten Urteilen und Begriffen kommen.“[8]
Steiner sagte dazu, noch in der Planungsphase der ersten Waldorfschule, die bis dato nur bis zur 8. Klasse geplant war: „Wenn sie das Kind entlassen aus der Schule, so müssen Sie in ihm die Fähigkeit veranlagt haben, nicht mehr mit allen Fibern der Seele im Leibe drinnen zu stecken, unabhängig geworden zu sein in Bezug auf Denken, Fühlen und Wollen vom Leibe.“[9] Das kann durch die Hinführung vom

---

[4] Tobias Richter, „Pädagogischer Auftrag und Unterrichtsziele – vom Lehrplan der Waldorfschule“, S. 302, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 2003
[5] Rudolf Steiner, Basel 1920, 6.Vortrag
[6] R. Steiner, GA 301, Seite 213
[7] Tobias Richter, „Pädagogischer Auftrag und Unterrichtsziele – vom Lehrplan der Waldorfschule“, S. 299, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 2003
[8] ebenda, S. 66
[9] Rudolf Steiner, „Erziehungskunst. Methodisch-Didaktisches“, GA 294, Dornach 1990, Vortrag vom 5.9.1960

vermessen der Dinge der Natur und der Werke der Kultur unter körperlichem und seelischem Einsatz, über das Erlernen forschenden Fragens, hin zum zunehmend abstrakteren, denkerischen Vorstellen, Beschreiben und letztlich zum eigenen Benutzen der harmonischen Gesetzmäßigkeiten in Geometrie und Kultur geschehen.

Gedichte für die Epoche:

Katzenpastete
von J.W. Goethe

Bewährt den Forscher der Natur
Ein frei und ruhig Schauen,
So folge Messkunst seiner Spur
Mit Vorsicht und Vertrauen.

Zwar mag in Einem Menschenkind
Sich beides auch vereinen;
Doch, dass es zwei Gewerbe sind,
Das lässt sich nicht verneinen.

Natur und Kunst
von J.W. Goethe

Natur und Kunst, sie scheinen sich zu fliehen
Und haben sich, eh man es denkt, gefunden;
Der Widerwille ist auch mir verschwunden,
Und beide scheinen gleich mich anzuziehen.

Es gilt wohl nur ein redliches Bemühen!
Und wenn wir erst in abgemessnen Stunden
Mit Geist und Fleiß uns an die Kunst gebunden,
Mag frei Natur im Herzen wieder glühen.

So ists mit aller Bildung auch beschaffen:
Vergebens werden ungebundne Geister
Nach der Vollendung reiner Höhe streben.

Wer großes will, muss sich zusammenraffen;
In der Beschränkung zeigt sich erst der Meister,
Und da Gesetz nur kann uns Freiheit geben.

Johann Wolfgang von Goethe, geadelt 1782 (* 28. August 1749 in Frankfurt am Main; † 22. März 1832 in Weimar; auch Göthe), ist als Dichter, Dramatiker, Theaterleiter, Naturwissenschaftler, Kunsttheoretiker und Staatsmann einer der bekanntesten Vertreter der Weimarer Klassik. Sein Werk umfasst Gedichte, Dramen und prosaische Literatur, aber auch naturwissenschaftliche Abhandlungen. Er gilt als der bedeutendste deutsche Dichter und herausragende Persönlichkeit der Weltliteratur.

In den beiden gewählten Gedichten befasst sich Goethe mit dem Verhältnis von Maß und Gesetz in Bezug auf die Natur (und die Kunst), und rät dem Menschen beides zu studieren und in ein Verhältnis zueinander zu setzen. Das ist auch Thema dieser Epoche. Daher finde ich die beiden Gedichte passend.

Wenn nicht mehr Zahlen und Figuren
Von Novalis

Wenn nicht mehr Zahlen und Figuren
Sind Schlüssel aller Kreaturen
Wenn die so singen, oder küssen,
Mehr als die Tiefgelehrten wissen,
Wenn sich die Welt ins freie Leben
Und in die Welt wird zurück begeben,
Wenn dann sich wieder Licht und Schatten
Zu echter Klarheit wieder gatten,
Und man in Märchen und Gedichten
Erkennt die wahren Weltgeschichten,
Dann fliegt vor einem geheimen Wort
Das ganze verkehrte Wesen fort.
(Novalis)

Wenn nicht mehr Zahlen und Figuren ist ein Gedicht von Novalis (Georg Friedrich Philipp Freiherr von Hardenberg) aus dem Jahr 1800.
Noch 1798 hatte Novalis in seinem „Monolog“ den Zauber von mathematischen Formeln gerühmt:

„Wenn man den Leuten nur begreiflich machen könnte, dass es mit der Sprache wie mit den mathematischen Formeln sei - Sie machen eine Welt für sich aus - Sie spielen nur mit sich selbst, drücken nichts als ihre wunderbare Natur aus, und eben darum sind sie so ausdrucksvoll --- eben darum spiegelt sich in ihnen das Verhältnisspiel der Dinge.“

In diesem Gedicht misstraut Novalis jedoch den „Tiefgelehrten“ und findet den Schlüssel zum Verständnis der Welt bei den Sängern und den Liebenden.

Ich denke es ist der Spannung des Alters der Achtklässler angemessen ihre möglicherweise „pubertäre Zerrissenheit“ zwischen überschwänglicher Gefühlswelt und aufkeimendem Sinn für objektive Strukturen und ihrer Sehnsucht nach unwiderlegbare Wahrheiten (wie die der Mathematik und Geometrie) durch die Rezitation dieses Gedichtes humorvoll und verständig aufzugreifen.

Teil III

Skizzenhafte Planung einer 3-wöchigen Geometrieunterrichtsepoche in der 8. Klasse Zum Thema „Der goldene Schnitt“

Drei Wochen Hauptunterrichtszeit von 8 bis 9:45 Uhr

1. Woche

- Gedicht „Katzenpastete“ von J.W. Goethe
- Der Begriff „Proportion“ und "Goldener Schnitt"
- Papierstreifenübung
- Erinnerung Konstruktion von Fünfecken mit Zirkel
- Pentagramm – konstruieren, vermessen, goldene Schnitte suchen und finden, Feststellung der stetigen Teilung
- Gesetze erkennen und formulieren
- Wo finden wir das Pentagramm in kulturellen/historischen/aktuellen Zusammenhängen? Wofür steht es da? (Faust, …)
- Gefühl für Verhältnisse/Proportionen entwickeln
- Goldener Schnitt ungleich DIN A Papiere
- Suchen und Betrachten von Pentagrammen und Fünfecken in der Natur (Schulgarten oder botanischer Garten mit Führung) (Rosenblüten)
- Beginn des geschichtlichen Überblicks

2. Woche

- Gedicht „Katzenpastete“ von J.W. Goethe
- Konstruktion des goldenen Schnittes mit Zirkel und Lineal
- Goldenes Rechteck
- Goldene Spirale
- Goldenen Winkel (z.B. in Sonnenblumenblütenständen)
- Aufgreifen des Themas im Biologieunterricht
- Bau von „goldenen Zirkeln“ aus Holzstiften oder Stahlnadeln o ä.
- Nachmessen aller möglichen Naturgegenstände, insbesondere Blätter und Blüten mit den selbstgebauten Zirkeln. Teils anhand genügend großer Naturgegenstände, teils anhand von Fotos und Zeichnungen z.B. von Karl Blossfeld oder Ernst Heckel. Auch menschlichen Körper.

- Le Corbusiers Maßsystem basierend auf den menschlichen Maßen und dem Goldenen Schnitt
- Aufgreifen des goldenen Schnittes im Musikunterricht
- Exkursion zum Geigenbauer

3. Woche

- Gedicht „Wenn nicht mehr Zahlen und Figuren“
- Nachmessen aller möglichen Kulturgegenstände und Kunstwerke insbesondere Architekturzeichnungen mit den selbstgebauten Zirkeln
- Aufgreifen des goldenen Schnittes im Kunstunterricht (und Kunstgeschichte)
- „Göttliche Ordnung“ – goldener Schnitt im Stadtgrundriss des nordhessischen Bad Arolsen als Manifestation der göttlichen Ordnung auf Erden und damit die Erhabenheit des damaligen absolutistischen Fürsten („fürstliches Marketing“ ☺)
- Nachmessen aller möglichen Konsumartikel, Werbegrafiken und Marketingartikeln z. B. Zigarettenschachteln mit den selbstgebauten Zirkeln
- Goldener Schnitt im Ikosaeder, anhand von Holzmodell der dreidimensional geschnittenen Flächen mit Ton ausgestalten
- Abschluss des Geschichtlichen Überblicks
- Exkursion in Marketingagentur

1. Tag:

- **Gedicht „Katzenpastete“** von J.W. Goethe zu rezitieren beginnen

- **Der Begriff "Proportionen" soll thematisiert werden**. Was sind Proportionen, wie wirken sie? (Wann erleben wir etwas als groß, wann als klein?) Was machen Verhältnismäßigkeiten aus? Plastische Übungen dazu. Oder Setzungen mit unterschiedlichen Gegenständen oder unterschiedlich großen Pappstücken.

- **Gibt es „harmonische Proportionspartner“ „Das Große“ zu „Dem Kleinen“?** Dazu Übung mit Pappflächen und/oder Pappstreifen oder Pappkreisen: Pappflächen unterschiedlicher Größe stehen zur Verfügung oder werden hergestellt. Nun sollen die Schüler ausprobieren, ob sie eine harmonisch wirkende Partnerschaft zwischen zwei Pappflächen finden.

2. Tag:

- **Gedicht „Katzenpastete“**

- **Papierstreifen** nach Art eines Überhandknotens falten, plattdrücken, Fünfeck entsteht mit gefaltetem Pentagramm darinnen. Maße nehmen, Zahlen aufschreiben. Massverhältnisse abschätzen (ca. 5:8 oder 3:5)

3. Tag:

- **Gedicht „Katzenpastete“** rezitieren.
- Den **Begriff „Goldener Schnitt“ einführen.**
- Weiter mit Papierstreifen: **Der Goldene Schnitt im Pentagramm**. Fünfecke mit Zirkel konstruieren, darein Pentagramm – konstruieren, vermessen, Goldene Schnitte anhand von Zahlenverhältnissen suchen und finden, Feststellung der stetigen Teilung.
- **Gesetze** erkennen und formulieren.
- **Gefühl für Verhältnisse/Proportionen entwickeln**
- Goldener Schnitt ungleich **DinA Papier**
- **Beginn des geschichtlichen Überblicks** mit Hippasos von Metapont

4. Tag:

- **Gedicht „Katzenpastete“** rezitieren.
- Wo finden wir **das Pentagramm in kulturellen/historischen/aktuellen Zusammenhängen**? Wofür steht es da? Hat das Symbol nachvollziehbare Bedeutung? Form und Inhalt ungleich Willkür.
- **Suche nach Pentagrammen** in der Umgebung der Schüler
- Geschichtlicher Überblick: Der goldene Schnitt

5. Tag:

- **Gedicht „Katzenpastete“** rezitieren.
- Wer hat wo ein **Pentagramm entdeckt?** Vermutete Bedeutung?
- Suchen und Betrachten von Pentagrammen und Fünfecken in der Natur (Schulgarten oder botanischer Garten mit Führung) (Rosenblüten)

- Geschichtlicher Überblick: Der goldene Schnitt

2. Woche, 1. Tag:

- **Gedicht „Katzenpastete“** rezitieren.
- **Konstruktion** des goldenen Schnittes mit Zirkel und Lineal (**innere Teilung, Verfahren nach Euklid**) einführen
- Geschichtlicher Überblick: Der goldene Schnitt

2. Woche, 2. Tag:

- **Gedicht „Natur und Kunst“** rezitieren.
- **Konstruktion** des goldenen Schnittes mit Zirkel und Lineal (innere Teilung) **üben**
- **Konstruktion** des goldenen Schnittes mit Zirkel und Lineal (**äußere Teilung)** einführen.
- Geschichtlicher Überblick: Der goldene Schnitt

2. Woche, 3. Tag:

- **Gedicht „Natur und Kunst“** rezitieren.
- **Konstruktion** des goldenen Schnittes mit Zirkel und Lineal (äußere Teilung) üben
- **Bau von „goldenen Zirkeln“** aus Holzstiften oder Stahlnadeln o ä.
- Geschichtlicher Überblick: Der goldene Schnitt

2. Woche, 4. Tag:

- **Gedicht „Natur und Kunst“** rezitieren.
- Konstruktion des goldenen Schnittes mit Zirkel und Lineal (Konstruktion nach Odom)

- **Bau von „goldenen Zirkeln“** aus Holzstiften oder Stahlnadeln o ä.
- Geschichtlicher Überblick: Der goldene Schnitt

2. Woche, 5. Tag:

- **Gedicht „Natur und Kunst“** rezitieren.
- Erinnerung der 3 Konstruktionsmöglichkeiten des goldenen Schnittes mit Zirkel und Lineal (innere Teilung, äußere Teilung und Konstruktion nach Odom)
- Geschichtlicher Überblick: Der goldene Schnitt

3. Woche, 1. Tag:

- **Gedicht „Natur und Kunst“** rezitieren.
- Erinnerung der 3 Konstruktionsmöglichkeiten des goldenen Schnittes mit Zirkel und Lineal (innere Teilung, äußere Teilung und Konstruktion nach Odom)
- **Aufgaben konstruktiv lösen**: Wenn ich Major habe, wie finde ich Minor? Wenn ich Minor habe, wie finde ich Major?
- Geschichtlicher Überblick: Der goldene Schnitt

3. Woche, 2. Tag:

- **Gedicht „Wenn nicht mehr Zahlen und Figuren“** rezitieren.
- **Aufgaben konstruktiv lösen wiederholen**: Wenn ich Major habe, wie finde ich Minor? Wenn ich Minor habe, wie finde ich Major?
- **Anwenden des Gelernten im Suchen und Finden der Goldenen-Schnitt-Verhältnisse in verschiedenen Bereichen**
- Nachmessen aller möglichen Naturgegenstände, insbesondere Blätter und Blüten mit den selbstgebauten Zirkeln. Teils anhand genügend großer Naturgegenstände, teils anhand von Fotos und Zeichnungen z.B. von Karl Blossfeld oder Ernst Heckel. Auch menschlichen Körper.
- Le Corbusiers Maßsystem basierend auf den menschlichen Maßen und dem Goldenen Schnitt

- Geschichtlicher Überblick: Der goldene Schnitt in der politischen Propaganda

3. Woche, 3. Tag:

- **Gedicht „Wenn nicht mehr Zahlen und Figuren“** rezitieren.

- **Anwenden des Gelernten im Suchen und Finden der Goldenen-Schnitt-Verhältnisse in verschiedenen Bereichen**

- Nachmessen aller möglichen Kulturgegenstände und Kunstwerke insbesondere Architekturzeichnungen mit den selbstgebauten Zirkeln. Gruppenarbeit.

- Geschichtlicher Überblick: Der goldene Schnitt im aktuellen Marketing

3. Woche, 4. Tag:

- **Gedicht „Wenn nicht mehr Zahlen und Figuren“** rezitieren.

- **Anwenden des Gelernten im Suchen und Finden der Goldenen-Schnitt-Verhältnisse in verschiedenen Bereichen** „Göttliche Ordnung“ – goldener Schnitt im Stadtgrundriss des nordhessischen Bad Arolsen als Manifestation der göttlichen Ordnung auf Erden und damit die Erhabenheit des damaligen absolutistischen Fürsten („fürstliches Marketing“ ☺)

- Nachmessen aller möglichen Konsumartikel, Werbegrafiken und Marketingartikeln z. B. Zigarettenschachteln mit den selbstgebauten Zirkeln

- Abschluss des Geschichtlichen Überblicks, Geschichtlicher Ausblick?

Geschichtlicher Überblick: Der goldene Schnitt im aktuellen Marketing

Zusammenfassung der Epoche.

3. Woche, 5. Tag:

- Exkursion in Marketingagentur

FAZIT

In dieser Geometrieepoche soll den Schülern ein generelles Verständnis für Proportionen, insbesondere für das Verhältnis des goldenen Schnittes, vermittelt werden. Das Verstehen des goldenen Schnittes soll vom Anfassen, Beobachten, Nachmessen über das Konstruieren bis hin zum klaren Erfühlen und Einschätzen geübt werden, so dass unvoreingenommenes Beobachten, bewegliches Denken und klares Empfinden in den Schülern angelegt ist.
Auch soll aus der Epoche hervorgehen wie Proportionen in Natur und Kultur mit Geometrie und Mathematik zusammenhängen und wie sich das Verständnis dieses Zusammenhanges historisch entwickelt hat, zu ästhetisch-künstlerischen Meisterwerken und ästhetisch-verführerischem Marketing (und Propaganda) benutzt wird und auch in der Zukunft weiterhin benutzt werden kann.