

**Hausarbeit Fach: Geometrie**

# **Platonische Körper**

**„Vom Anfassen in die Vorstellung“  
Unterrichtsskizzen für die 8. Klasse**

Gliederung:

Einführung

## Teil I

### Platonische Körper Geometrisch-mathematischer Inhalt

Regelmäßige und unregelmäßige Polyeder

Was sind platonische Körper?

Die Namen

Sternkörper

Wie viele platonische Körper gibt es?

Es gibt nur fünf platonische Körper

Der Euler'sche Polyedersatz  $E + F - K = 2$

Berührende Kugeln

Eigenschaften

Dualitäten

Einbeschreibungen

Archimedische Körper

Goldener Schnitt im Ikosaeder

Goldener Schnitt

Konstruktion des goldenen Schnittes mit Zirkel und Lineal

Geschichtliche Übersicht

Historische Personen die sich mit platonischen Körpern auseinandersetzten

Euklid v. Alexandria

Johannes Kepler

Platonische Körper jenseits der Mathematik

Platonische Körper in der Kunst, Übersicht

Schottische Steinbälle

Etruskische und Römische Dodekaeder

Italienische Renaissance

Deutsche Renaissance

Salvador Dalí

M.C. Escher

Platonische Körper in der Natur

Plankton

Alge

Woraus besteht die Welt?

## Teil II

### **Menschenkundliche Grundgedanken**

zur Entwicklung der Schülern des 8. Schuljahres und der daher empfohlenen pädagogisch-didaktischen Unterrichtsmethoden  
Der Geometrieunterricht in der 8. Klasse

## Teil III

### **Skizzenhafte Planung einer 3-wöchigen Geometrieunterrichtsepoche in der 8. Klasse Zum Thema „Platonische Formen“**

1. Woche
2. Woche
3. Woche

## Fazit

## Einführung

Meine Hausarbeit ist eine Unterrichtsskizze für den Geometrieunterricht der 8. Klasse einer Waldorfschule.

Mathematisch/geometrisch, also inhaltlich geht es um die „Platonischen Körper“.

Unterrichtsziel ist es die Schüler „vom Anfassen in die Vorstellung“ zu geleiten. Anhand praktischer Übungen in denen mit Stäben, Ton, Röhrchen, Papier etc. die platonischen Körper konstruiert werden sollen die Schüler in die Welt der dreidimensionalen geometrischen Körper eingeführt werden und räumliches, abstraktes Vorstellungsvermögen erlernen.

Das geometrische Thema soll durch punktuelle Schlaglichter aus Geschichte und Kunst eingerahmt und erweitert werden um den Schülern die Bedeutung der geometrischen Thematik in verschiedenen konkreten Kontexten darzustellen.

Die pädagogisch-didaktische Grundlage meiner Unterrichtsgestaltung fußt auf „Rudolf Steiners Lehrplan für die Waldorfschulen“ von E. A. Stockmeyer und dem Buch „Pädagogischer Auftrag und Unterrichtsziele – vom Lehrplan der Waldorfschule“ Herausgegeben von Tobias Richter.

# Teil I

## Platonische Körper Geometrisch-mathematischer Inhalt

Da es heute Informationen über (fast) alle Themen im Internet gibt, halte ich es für vertretbar die Grundlagen des geometrisch-mathematischen Inhalts aus dem Internet zu nehmen. Daher füge ich hier ausgewählte Textteile aus verschiedenen Online-Quellen ein, die ich für brauchbar halte, um mein eigenes mathematisch-geometrischen Grundwissen für den Unterricht parat zu haben. Teilweise habe ich auch zwei unterschiedliche Erläuterungen zum selben Thema eingefügt. Die Verinnerlichung, Individualisierung und künstlerische Aufbereitung des Unterrichtsinhaltes geschieht im Weiteren.

Die Textausschnitte entstammen folgenden Websites:

[http://de.wikipedia.org/wiki/Platonischer\\_Körper](http://de.wikipedia.org/wiki/Platonischer_Körper)  
<http://btmdx1.mat.uni-bayreuth.de/~rockstroh/Platon.htm>  
<http://www.mathematische-basteleien.de/platonisch.htm>  
[http://de.wikipedia.org/wiki/Archimedischer\\_Körper](http://de.wikipedia.org/wiki/Archimedischer_Körper)

### Regelmäßige und unregelmäßige Polyeder

Ein Polyeder (auch Vielflach, Vielflächener oder Ebenflächner) ist ein Körper, der ausschließlich von geraden Flächen begrenzt wird, beispielsweise ein Kubus.

Polyeder gibt es verschiedene, sie tragen Namen wie: "Irgendwie"-eder, Tetraeder, Kubus, Oktaeder, Ikosaeder, Dodekaeder, Kubustumpf und Dodekaederstern. Viele Namen entstammen dem Griechischen.

Welche Polyeder finden wir im Alltag?

Das eben genannte „Irgendwie“-eder ist ein irgendwie geformtes Polyeder, solche lassen sich beliebig viele bilden. Sie sind (wie auch das Chaos) durchaus nicht uninteressant - doch von den anderen Polyedern geht ein besonderer Reiz aus.

Es ist der Reiz der Ordnung, der Regelmäßigkeit, der Symmetrie, der seit Jahrhunderten Künstler, Wissenschaftler, Philosophen und alle anderen neugierigen Menschen fasziniert.

Offensichtlich gibt es verschiedene Regelmäßigkeiten. Welche Körper haben was für eine Regelmäßigkeit? (Eigenschaften der Seitenflächen und Eckpunkte beachten!)

Die "ordentlichsten" Polyeder werden Platonische Körper oder Regelmäßige Polyeder genannt. Die etwas "unordentlicheren" gehören zu den Archimedischen Körpern bzw. zu den Sternkörpern.

Für das Be-Greifen ist es gut, etwas in den Händen zu haben. Um ein Gefühl für diese Körper zu bekommen, kann man für sie Modelle bauen.

## Was sind platonische Körper?

Platonische Körper sind konvexe Körper, die von kongruenten, regelmäßigen Vielecken gebildet werden und bei denen an jeder Ecke die gleiche Anzahl von Vielecken zusammentrifft.

Obwohl es beliebig viele regelmäßige Vielecke gibt, gibt es nur fünf regelmäßige Körper:  
Tetraeder, Kubus (oder Hexaeder), Oktaeder, Pentagondodekaeder und Ikosaeder.

Ein Körper zum Beispiel, der von zwei Tetraedern gebildet wird, ist kein platonischer Körper. Er wird zwar von regelmäßigen Dreiecken begrenzt, aber an den Ecken treffen sich mal drei, mal vier Dreiecke.

Platonische Körper heißen auch regelmäßige Körper und in Anlehnung an die englische Bezeichnung regular solids auch reguläre Körper. Statt Körper gibt es auch die genauere Bezeichnung Polyeder.

Die platonischen Körper (oder regulären Polyeder) sind die nach dem griechischen Philosophen Platon benannten. Ihre Namen stammen aus dem Griechischen und beziehen sich auf die Anzahl ihrer Flächen: Tetraeder (Vierflächner aus vier Dreiecken), Hexaeder (Sechsfächner bzw. Kubus aus sechs Quadraten), Oktaeder (Achtflächner aus acht Dreiecken), Dodekaeder (Zwölfplächner aus zwölf Fünfecken) und Ikosaeder (Zwanzigflächner aus zwanzig Dreiecken).

## Die Namen

der Polyeder (auch Vielflach, Vielflächner oder Ebenflächner) setzen sich aus einem griechischen Präfix für die Seitenzahl und der Silbe -eder ("Seite") zusammen:

1	mono	7	hepta
2	di	8	okta
3	tri	9	ennea
4	tetra	10	deka
5	penta	11	hendeka
6	hexa		

12	dodeka	17	heptakaideka
13	triskaideka	18	oktakaideka
14	tetrakaideka	19	enneakaideka
15	pentakaideka	20	ikosa
16	hexakaideka	24	ikositetra

### Sternkörper

Baut man Pyramiden auf den Seitenflächen eines Polyeders auf erhält man Sternkörper, wie das Sterntetraeder.

Verwendet man für die Pyramiden gleichseitige Dreiecke, hat man Beispiele für Polyeder, die vollständig aus gleichen Polygonen bestehen, bei denen aber unterschiedlich viele in den Ecken zusammenstoßen.

### Wie viele Platonische Körper gibt es?

Die  $F$  Seitenflächen haben zusammen  $n \cdot F$  Seiten, jeweils zwei der Seiten ergeben eine Kante. Damit ist

$$(1) \quad 2K = n \cdot F$$

Jede Ecke verbindet  $m$  Kanten, über alle Ecken gezählt sind das  $m \cdot E$  Kanten. Jede Kante des Polyeders verbindet zwei Ecken, wird demnach zweimal gezählt. Folglich ist

$$(2) \quad 2K = m \cdot E$$

Mit diesen Beziehungen werden  $E$  und  $F$  im Euler'sche Polyedersatz ersetzt:

$$E + F - K = 2 \rightarrow \frac{2K}{m} + \frac{2K}{n} - K = 2$$

Teilen durch  $K$  ergibt

$$(3). \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{K} + \frac{1}{2}$$

*Offensichtlich sind  $n = 3$  und  $m = 3$ .*

*Beide können nicht zugleich größer als 3 sein, da dann wegen  $1/n = 1/4$  und  $1/m = 1/4$  die linke Seite von (3) nicht größer  $1/2$  sein kann, was aber bei  $K > 0$  sein muss.*

$n$	$m$	$E$	$F$	$K$	
3	3	4	4	6	<i>Tetraeder</i>
3	4	6	8	12	<i>Oktaeder</i>
3	5	12	20	30	<i>Ikosaeder</i>
4	3	8	6	12	<i>Kubus</i>
5	3	20	12	30	<i>Dodekaeder</i>

*Aus demselben Grund gilt für  $n = 3$  die Ungleichung  $m \leq 5$  bzw. für  $m = 3$  die Ungleichung  $n \leq 5$ .*

*Die verbleibenden fünf Fälle ergeben jeweils genau eine ganzzahlige Lösung für  $K$ .*

*Mit (1) und (2) erhält man die Werte für  $E$  und  $F$ .*

*Anmerkung: Hieraus folgt nur, dass es nicht mehr als fünf verschiedene Platonische Körper gibt. Offen bleibt, ob diese konstruierbar sind.*

## **Es gibt nur fünf platonische Körper**

### **Winkelbetrachtung**

Man kann nur aus drei, vier oder fünf Dreiecken eine Ecke formen. Man braucht nämlich mindestens drei Dreiecke für eine Ecke und sechs Dreiecke haben schon zusammen  $360^\circ$  und liegen somit in einer Ebene. Also bleiben nur 3, 4 und 5 Dreiecke.

Man kann nur aus drei Quadraten und drei Fünfecken eine Ecke bilden. Das sind alle Fälle.

Noch mal langsamer:

Die einfachste Begrenzungsfläche ist das gleichseitige Dreieck. Es hat Winkel von  $60^\circ$ . Eine räumliche Ecke entsteht aus mindestens 3 Flächen:

$$3 \cdot 60^\circ = 180^\circ \text{ (Tetraeder-Ecke)}$$

$$4 \cdot 60^\circ = 240^\circ \text{ (Oktaeder-Ecke)}$$

$$5 \cdot 60^\circ = 300^\circ \text{ (Ikosaeder-Ecke)}$$

6 gleichseitige Dreiecks-Flächen bilden einen Vollwinkel - bei 6 oder mehr Flächen entsteht keine räumliche Ecke.

Allgemein: Die Summe der Winkel zwischen den Kanten einer konvexen Ecke ist kleiner  $360^\circ$ .

Begrenzungsfläche: Quadrat  
 $3 \cdot 90^\circ = 270^\circ < 360^\circ$  (Kubus-Ecke)  
 $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$  (= ebene Fläche)

Begrenzungsfläche: Pentagon  
 $3 \cdot 108^\circ = 324^\circ < 360^\circ$  (Dodekaeder-Ecke)  
 $4 \cdot 108^\circ = > 360^\circ$

Begrenzungsfläche: regelmäßige 6-Ecke:  $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$

Ergebnis: Es gibt nur fünf regelmäßige Polyeder.

Dieser Beweis geht auf Euklid zurück. Eine weitere Beweismöglichkeit bietet der Euler'sche Polyedersatz.

Der Wechsel der Dimension bewirkt einen Qualitätswechsel:  
In der Ebene gibt es unendlich viele regelmäßige Polygone - im Raum nur fünf regelmäßige Körper.  
Ihre endliche Anzahl eignete sie für Platon als Bausteine seines Weltmodells.

### **Der Euler'sche Polyedersatz $E + F - K = 2$**

Diese Formel gilt für alle einfachen Polyeder. Sie wurde 1640 von Descartes (1596 - 1650) gefunden und 1752 von Euler wieder entdeckt. Gekannt hat sie vermutlich schon Archimedes.

Bau des Schlegeldiagramms zum Beweis.

Für einen Punkt gilt  
 $E = 1$ ,  
 $F = 1$  (Das Gebiet außerhalb des Punktes (quasi in die Unendlichkeit offen)),  
 $K = 0$   
- also  $E + F - K = 2$ .

Eine neue Kante verbindet eine alte Ecke entweder mit einer bereits vorhandenen Ecke (a) oder mit einer neuen Ecke (b):

$E = 7 + 0$   
 $K = 8 + 1$   
 $F = 3 + 1$

$E + F - K = 2$

$$E = 7 + 1$$

$$K = 8 + 1$$

$$F = 3 + 0$$

$$E + F - K = 2$$

Der Term  $E + F - K$  bleibt unverändert. Wegen der Korrespondenz des Schlegeldiagramms mit dem Polyeder ist damit der Euler'sche Polyedersatz bewiesen.

Mit diesem Satz lässt sich auch zeigen, dass es nur fünf regelmäßige Polyeder gibt.

### Berührende Kugeln

Aus der hohen Symmetrie folgt unmittelbar: Jeder platonische Körper hat eine Inkugel, die alle seine Flächen berührt, und eine Umkugel, auf der alle seine Ecken liegen, sowie eine Kugel, auf der die Mittelpunkte der Kanten liegen.

Der gemeinsame Mittelpunkt dieser drei Kugeln ist der Mittelpunkt (oder das Zentrum) des platonischen Körpers.

### Eigenschaften

Wie viele Ecken (E), Flächen (F) und Kanten (K) haben die Platonischen Körper?

	E	F	K
Tetraeder	4	4	6
Kubus	8	6	12
Oktaeder	6	8	12
Ikosaeder	12	20	30
Dodekaeder	20	12	30

Zufall? Jede in dieser Tabelle vorkommende Zahl tritt mehrfach auf. Lässt sich zwischen den Größen E, K und F verschiedener Körper eine Beziehung herstellen?

## Dualitäten

Verbindet man die Mittelpunkte der Seitenflächen eines platonischen Körpers, so entsteht wieder ein platonischer Körper.

Diese zusammengehörigen Körper heißen duale Körper.

Tetraeder	4 Ecken,	6 Kanten,	4 Flächen
Kubus	8 Ecken,	12 Kanten,	6 Flächen
Oktaeder	6 Ecken,	12 Kanten,	8 Flächen
Dodekaeder	20 Ecken,	30 Kanten,	12 Flächen
Ikosaeder	12 Ecken,	30 Kanten,	20 Flächen

Das Tetraeder ist selbstdual.

Der Kubus ist dual zum Oktaeder.

Das Dodekaeder ist dual zum Ikosaeder.

Auf diese Weise kann man die Körper in drei Klassen einteilen.

Duale Körper haben die gleiche Kantenzahl, die Anzahl der Ecken und Flächen tauschen sich aus.

Die Kombination Kubus und Oktaeder zeigt die Übereinstimmungen:

$$\begin{aligned} 6 \text{ Flächenzahl des Kubus} &= \text{Eckenzahl des Oktaeders} \\ 8 \text{ Eckenzahl des Kubus} &= \text{Flächenzahl des Oktaeders} \\ 12 \text{ Kantenzahl des Kubus} &= \text{Kantenzahl des Oktaeders} \end{aligned}$$

Über der Mitte jeder der 6 Kubuseiten ist eine Oktaederecke.

Über der Mitte jeder der 8 Oktaederseiten ist eine Kubusecke.

Die Kanten beider Körper schneiden sich im rechten Winkel.

Die Kombination Ikosaeder und Dodekaeder zeigt

$$20 \text{ Flächenzahl des Ikosaeder} = \text{Eckenzahl des Dodekaeder}$$

$$12 \text{ Eckenzahl des Ikosaeder} = \text{Flächenzahl des Dodekaeder}$$

$$30 \text{ Kantenzahl des Ikosaeder} = \text{Kantenzahl des Dodekaeder}$$

Über der Mitte jeder der 20 Ikosaederseiten ist eine Dodekaederecke.

Über der Mitte jeder der 12 Dodekaederseiten ist eine Ikosaederecke.

Die Kanten beider Körper schneiden sich im rechten Winkel.

Tetraeder

$$4 = \text{Eckenzahl des Tetraeders} = \text{Flächenzahl des Tetraeders}$$

## Einbeschreibungen

Alle Eckpunkte des einzubeschreibenden Polyeders sollen entweder Eckpunkte, Kantenmittelpunkte oder Flächenpunkte des Ausgangspolyeders sein.

12 Kantenzahl des Kubus =      Flächenzahl des Dodekaeders

Ein Kubus kann dem Dodekaeder einbeschrieben werden, so dass jede der Dodekaederflächen eine Kubuskante enthält.

Analog folgt aus 12 Kantenzahl des Oktaeders = Eckenzahl des Ikosaeders, dass dem Oktaeder ein Ikosaeder einbeschrieben werden kann, so dass jeder der Oktaederkanten eine Ikosaederecke enthält. Die Oktaederkanten werden durch diese **im Goldenen Schnitt** geteilt.

6 Kantenzahl des Tetraeders = Flächenzahl des Kubus = Eckenzahl des Oktaeders

Ein Tetraeder lässt sich einem Kubus einbeschreiben, so dass jede Kante einer Flächendiagonale des Kubus entspricht. Dem Tetraeder kann ein Oktaeder einbeschrieben werden, so dass die Mittelpunkte der Tetraederkanten die Ecken des Oktaeders bilden.

Zwei weitere Einbeschreibungen sind etwas schwieriger zu finden: die des Ikosaeders in den Kubus und die eines Oktaeders in das Dodekaeder.

## Archimedische Körper

Man erhält neue Körper, indem man an den Ecken eines platonischen Körpers Schnitte so legt, dass Körper mit regelmäßigen Vielecken als Seitenflächen entstehen.

Jeder archimedische Körper kann durch Abstumpfen aus einem platonischen Körper erzeugt werden. Bei vielen archimedischen Körpern deutet auch der Name darauf hin. Mit Abstumpfen eines Körpers ist hier gemeint, dass dem Körper beliebige Stücke weg geschnitten werden, dabei aber die Flächen des Körpers — in aller Regel verkleinert — als Flächen des abgestumpften Körpers erhalten bleiben.

Wenn ein archimedischer Körper durch Abstumpfen aus einem platonischen Körper erzeugt werden kann, dann kann er auch aus dem dazu dualen platonischen Körper durch Abstumpfen erzeugt werden.

Nimmt man z.B. ein Oktaeder und teilt jede Kante in drei gleiche Teile, so entsteht ein Körper aus sechs Quadraten und acht regelmäßigen Sechsecken. Er heißt folgerichtig "das abgestumpfte Oktaeder".

Alle archimedischen Körper wurden von Kepler nummeriert. Bekannt ist Nummer 4, das abgestumpfte Ikosaeder wegen der Fußball-Form.

## **Goldener Schnitt im Ikosaeder**

Drei Goldene Rechtecke im Ikosaeder:

Die zwölf Ecken des Ikosaeders bilden die Ecken von drei gleich großen, senkrecht aufeinander stehenden Rechtecken mit gemeinsamem Mittelpunkt und mit den Seitenverhältnissen des Goldenen Schnittes. Die Anordnung der drei Rechtecke heißt auch Goldener-Schnitt-Stuhl.

## **Goldener Schnitt**

Der Goldene Schnitt (lat. sectio aurea) ist ein bestimmtes Verhältnis zweier Zahlen oder Größen:

Zwei Strecken stehen im Verhältnis des Goldenen Schnittes, wenn sich die größere zur kleineren verhält wie die Summe aus beiden zur größeren.

Der Wert beträgt etwa 1,618. Streckenverhältnisse im Goldenen Schnitt werden in der Kunst und Architektur oft als ideale Proportion und als Inbegriff von Ästhetik und Harmonie angesehen. Darüber hinaus tritt das Verhältnis auch in der Natur in Erscheinung und zeichnet sich durch eine Reihe interessanter mathematischer Eigenschaften aus. Weitere verwendete Bezeichnungen sind stetige Teilung und göttliche Teilung (lat. proportio divina).

## **Konstruktion des goldenen Schnittes mit Zirkel und Lineal**

Als Konstruktionsverfahren betrachtet man in der Geometrie nur diejenigen Verfahren, die sich auf die Verwendung von Zirkel und Lineal beschränken. Für die Teilung einer Strecke im Verhältnis des Goldenen Schnittes gibt es eine Fülle derartiger Verfahren. Das folgende Verfahren ist wegen seiner Einfachheit beliebt:

Errichte auf der Strecke AB im Punkt B eine Senkrechte der halben Länge von AB mit dem Endpunkt C.

Der Kreis um C mit dem Radius CB schneidet die Verbindung AC im Punkt D. Der Kreis um A mit dem Radius AD teilt die Strecke AB im Verhältnis des Goldenen Schnittes.

## Geschichtliche Übersicht

Den **Pythagoräern** (6. Jh. v. Chr.) waren Tetraeder, Kubus, und Dodekaeder bekannt. **Theaitetos** (4. Jh. v. Chr.) kannte auch Oktaeder und Ikosaeder, wobei das Oktaeder vermutlich vorher nur deshalb nicht beachtet wurde, weil es als Doppelpyramide gesehen wurde. Der griechische Philosoph **Platon** (um 300 v. Chr.) hat die Körper später in seinem Werk Timaios (Kap. 20, 53c4-55c6) ausführlich beschrieben und sie den Elementen des platonischen Weltbildes zugeordnet (Kap. 21, 55c7-56c7). Sie wurden in Platons Akademie intensiv untersucht und galten dort als Repräsentanten der vier Elemente, denen sie wie folgt zugeordnet wurden:

Feuer: Tetraeder

Wasser: Ikosaeder

Luft: Oktaeder

Erde: Kubus

Weltall oder später hinzugefügtes "fünftes" Element Äther / Quintessenz oder Geist: Dodekaeder

Davon leitet sich auch die alternative Bezeichnung kosmische Körper her.

**Euklid** (um 300 v. Chr.) konstruiert die platonischen Körper im XIII. Buch seiner Elemente (§§ 13-17) und beweist, dass es genau fünf reguläre Polyeder gibt (§ 18a). Das später angefügte "XIV. Buch" (aus dem 2. Jh. v. Chr. von Hypsikles) enthält einige Volumenberechnungen und das "XV. Buch" (aus dem 6. Jh. n. Chr.) enthält weiteres Material, das griechische Mathematiker an diesen regelmäßigen Körpern entdeckt haben.

Mit dem Aufkommen der Perspektive beschäftigten sich auch Künstler mit den platonischen Körpern (neben anderen regelmäßigen Körpern) und verwendeten sie dazu, ihre Fähigkeiten zu zeigen: u.a. **Piero della Francesca**, **Leonardo da Vinci** (Illustrationen zu Divina Proportione von Luca Pacioli), **Albrecht Dürer**, **Wenzel Jamnitzer** (Perspectiva Corporum Regularium, 1568).

**Johannes Kepler** gelang es (Mysterium Cosmographicum, 1596), die Bahnradien der sechs damals bekannten Planeten durch eine bestimmte Abfolge der fünf Körper und ihrer Innen- und Außenkugeln darzustellen. Diese Interpretation stimmt zwar ziemlich gut mit den damals bekannten ungenauen Werten überein, ihr entspricht aber keine astronomische Gesetzmäßigkeit.

Bei der Suche nach solchen Harmonien studiert Kepler in seinem Werk Harmonice Mundi (Weltharmonik) auch systematisch regelmäßige Körper und beschreibt neben den platonischen Körpern unter anderem auch die archimedischen Körper, sowie zwei nichtkonvexe regelmäßige Polyeder, so genannte Sternkörper.

## Historische Personen die sich mit platonischen Körpern auseinandersetzten

### Euklid v. Alexandria

(~ 300 v.Chr.)

Über Euklid gibt es kaum gesicherte biographische Daten. Man nimmt an, dass er in Alexandria am Hofe der Ptolemäer lebte und dort eine mathematische Schule gründete. Von seinen Werken sind keine Originalhandschriften erhalten geblieben, teilweise kennen wir sie sogar nur dem Titel nach.

In den Elementen fasste Euklid in 13 Kapiteln (Büchern) das mathematische Grundlagenwissen seiner Zeit zusammen, indem er die mathematischen Ergebnisse aus älteren Schriften übernahm. Seine herausragende Leistung besteht darin, den Stoff didaktisch vorbildlich dargestellt zu haben.

Der Höhepunkt der Elemente ist das XIII. Buch, dessen Inhalt vermutlich auf Theaitetos zurückgeht. In diesem wird die **Konstruktion der Platonischen Körper mit Zirkel und Lineal** behandelt. Es wird gezeigt, dass diese Körper in **Umkugeln** einbeschrieben und Beziehungen zwischen dem Radius der Umkugel und den Kantenlängen hergeleitet werden können. In einem Zusatz **begründet Euklid, warum es höchstens fünf geben kann.**

Im XV. Buch, das sich aus den Beiträgen verschiedener Autoren zusammensetzt, wird die **Einbeschreibung** eines regelmäßigen Körpers in einen anderen beschrieben.

### *Johannes Kepler*

( 27. 12. 1571 - 15. 11. 1630)

Kepler ist heute vor allem durch die nach ihm benannten Gesetze zur Beschreibung der Planetenbahnen (1609) bekannt. Noch davor fand er aus der Betrachtung der Konjunktionen aufeinander folgender Planeten zu einem Weltmodell.

Er beschreibt es im "Mysterium Cosmographicum" (1596):

"Die Erdbahn ist das Maß für alle anderen Bahnen. Ihr umschreibe ein Dodekaeder; die dies umspannende Sphäre ist der Mars. Der Marsbahn umschreibe ein Tetraeder; die dieses umspannende Sphäre ist der Jupiter. Der Jupiterbahn umschreibe einen Kubus; die diesen umspannende Sphäre ist der Saturn. Nun lege in die Erdenbahn ein Ikosaeder; die diesen einbeschriebene Sphäre ist die Venus. In die Venusbahn lege ein Oktaeder; die diesem einbeschriebene Sphäre ist der Merkur. Da hast du den Grund für die Anzahl der Planeten."

Diesem Modell liegt zugrunde, dass jeder der Platonischen Körper eine Inkugel besitzt, auf der die Mittelpunkte sämtlicher Flächen liegen und eine Umkugel, auf der sämtliche Korperecken liegen.

Die Planeten beschreiben Kreisbahnen auf Kugelschalen, deren Abstände durch die nacheinander eingepassten Platonischen Körper gegeben sind. Diese stimmten recht gut mit den damals bekannten (ungenauen) tatsächlichen Abstände überein.

Mit der Entdeckung weiterer Planeten (Uranus - 1781, Neptun - 1846) sowie genauerer Berechnungen der Bahnen verlor sein Weltmodell an Bedeutung.

Hermann Weyl (1885 - 1955) schrieb: "Wir teilen noch immer seinen Glauben an eine mathematische Harmonie des Universums ... Aber wir suchen diese Harmonie nicht mehr in statischen Formen wie den regulären Körpern, sondern in dynamischen Gesetzen."

In seinem 1619 erschienenem Hauptwerk, der "Weltharmonik", untersucht und verbindet Kepler die geometrische Symmetrie in der Kunst, speziell der Musik und in der Astronomie. In diesem Werk führt er für die Platonischen Körper den Begriff der Polarität (Dualität) ein und gibt die erste vollständige Darstellung der Archimedischen Körper. Er entdeckte er auch zwei nichtkonvexe reguläre Polyeder, die Keplerschen Sternkörper.

### **Platonische Körper jenseits der Mathematik**

Die auffällige Regelmäßigkeit macht die platonischen Körper auf vielerlei Art für den Menschen interessant.

Zusätzlich zum klassischen, geometrischen **Kubus**, der leicht herzustellen ist und schon seit Jahrtausenden für Glücksspiele verwendet wurde, finden heute auch die anderen platonischen Körper (welche auch als Kubus bezeichnet werden) eine Anwendung im Spiel, z.B. im Fantasy-Rollenspiel (siehe SpielKubus). Die Voraussetzungen dazu sind eine physikalisch gleichmäßige Dichteverteilung – also homogenes Material – sowie die gleichartige Beschaffenheit aller Ecken und Kanten.

## Platonische Körper in der Kunst

### Übersicht

Die künstlerische Darstellung Platonischer Körper wird so alt wie die Wahrnehmung dieser Körper sein.

Die ältesten gegenwärtig bekannten Zeugnisse sind **schottische Steinbälle**. Aufgrund ihrer Bearbeitungsweise haben sie über den reinen (unbekannten) Gebrauchswert hinaus Kunstcharakter.

Über den Verwendungszweck des **römischen Pentagondodekaeders** wird bis heute spekuliert.

In der **Renaissance** beschäftigten sich viele Künstler mit der **perspektivischen Darstellung**. Damit einher ging das Interesse an geometrischen Formen überhaupt, speziell an regelmäßigen Körpern.

Interessanterweise findet sich diese Verbindung auch bei zwei modernen Künstlern, **Dali und Escher**. Wie seine Vorgänger im alten Griechenland und auch Kepler suchte Dali in den regelmäßigen Körpern **metaphysische Erkenntnis**. Möglicherweise waren ihm sogar die schottischen Steinkugeln bekannt.

### Nähere Beschreibungen dazu

#### Schottische Steinbälle

In Schottland wurden an verschiedenen Stellen einige hundert Steinkugeln gefunden. Sie sind mit Gravuren versehen und weisen zwischen 3 und 160 Knoten auf. Ihre Größe beträgt ca. 70 mm. Ungeklärt ist ihre Bedeutung. Sie könnten Kultgegenstände, Waffen oder Spielzeuge gewesen sein. Unter diesen über 4000 Jahre alten Steinkugeln befinden sich verschiedene reguläre und halbreguläre Körper.

Auf der mittleren Kugel sind 12 sphärische Pentagone eingraviert. Offenbar war schon damals - mehr als 1000 Jahre vor den Pythagoreern - das Grundprinzip der Dodekaedersymmetrie bekannt. Kubus, Tetraeder und Oktaeder sind auch vertreten.

#### Etruskische und Römische Dodekaeder

Bei Padua wurde ein etruskisches Dodekaeder aus dem 5. Jh. v. Chr. gefunden.

"Wenn die Kenntnis des Dodekaeders aus der Erfahrung erworben wurde, so konnte sie nirgends anders als in Oberitalien auftauchen" (Lindemann). Hier und auf Elba sind die sonst sehr seltenen regelmäßigen Pyritkristalle zu finden.

Römisches Dodekaeder. 1991 in Augst (Schweiz) gefunden.  
Nach keramischen Mitfunden auf 30 -110 datiert.  
Aufbewahrungsort: Römermuseum Augst.  
Größe: ca. 6 cm. Gewicht: 109 Gramm

Bis 1995 wurden 92 Römische Dodekaeder gefunden, datiert zwischen  
Zeitenwende und 400 n. Chr. Über ihre ursprüngliche Verwendung gibt es  
verschiedene Vermutungen: Zepterknäuf, Waffe, Spielzeug, Kerzenhalter,  
Kalibrierungsinstrument, Vermessungsapparat, mystisches oder religiöses  
Symbol.

### *Italienische Renaissance*

Jacopo de 'Barberil: Luca Pacioli, um 1499

1509 verfasste Luca Pacioli "De Divina Proportione" (Die göttliche Proportion).  
Der goldene Schnitt stand in der Renaissance hoch im Kurs und ist in vielen  
Kunstwerken zu finden. Neben diesem untersuchte Pacioli durch Abschneiden  
und Zusammenfügen aus den Platonischen entstandene Körper.

Pacioli wird übrigens vorgeworfen, einen Teil dieser Schrift von Piero della  
Francesca plagiiert zu haben.

Sonett des Luca Pacioli

Fünf Körper hat die mächtige Natur erzeugt,  
Die treffend man als einfache bezeichnet.  
Denn in jedweder Mischung finden sie vereint sich  
Und fügen ordnungsmäßig sich zusammen.

Rein, unvermischt und makellos erschaffen  
Als Feuer, Wasser, Himmel, Luft und Erde  
Zahllosen Keimen gaben sie den Ursprung  
Nach Platos Meinung, und die erste Form.

Doch weil vom Leeren die Natur erschreckt  
Nach Aristoteles in Erd' und Himmel  
Nicht können sie für sich allein bestehn.

Und keiner Art begegnet unser Auge  
Doch Platos Geist und dem Euklids gelang es  
Fünf kugelart'ge Körper zu entdecken  
Von regelrechter Form und schönem Anblick  
Von gleichen Flächen und von gleichen Kanten.

Und noch ein sechster kann niemals entstehen.

## ***Deutsche Renaissance***

Dürers Kupferstich Melancholia I (1514)  
Darstellung einer Kugel und Rhomboederstumpf

Im Bestreben, die Formgesetze der Kunst zu erschließen, beschäftigte sich Albrecht Dürer (1471 - 1528) auch mit der Theorie des perspektivischen Zeichnens. In seiner "Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt, in Linien ebenen unnd gantzen corporen" (1525) gibt er die Konstruktion der Platonischen Körper an. Neu waren die von ihm beigefügten Netzabwicklungen, die die Anfertigung der Körper vereinfachten.

Man vermutet, Dürer habe 1506 bei einem Italiaufenthalt Pacioli und da Vinci kennen gelernt.

1567 erschien "Geometria et Perspectiva" des Augsburger Malers und Formenschneiders Lorenz Stör. Dieses für die Arbeit von Schreiner gedachte Werk zeigt in zwölf Holzschnitten in perspektivischer Darstellung verschiedene regelmäßige Körper, deren Abwandlungen und Durchdringungen.

Wenzel Jamnitzer (1508 - 1585) veröffentlichte 1568 die "Perspectiva corporum regularium".

Darin stellt er die Platonischen, einige Archimedische Körper und sogar das Große Dodekaeder als Kantenmodell dar.

## **Salvador Dalí**

(2. 5. 1904 - 23. 1. 1989)

Für Salvador Dalí war sein Vorname Programm: Retter der modernen Malerei.

Mit dem Abwurf der Atombombe fängt nach dem 2. Weltkrieg für den spanischen Surrealisten eine neue Ära an. Im "Mystischen Manifest" (1951) formuliert er die Synthese aus Atomphysik und Klassizismus als ihr Ziel - das Malen der modernen Zeit mit (von ihm verbesserten) Rezepten der alten Meister. Verstärkt wendet er sich religiösen und mystischen Sujets zu und verfolgt gleichzeitig gespannt alle wissenschaftlichen und technischen Neuerungen.

1948 beginnt sich Dalí für die Divine Proporzioe von Pacioli zu interessieren. Drei Monate lang rechnet er die mathematische Anordnung der Elemente der Leda atomica aus, wendet auch in anderen Werken konsequent die Regeln der Goldenen Proportion für den geometrischen Aufbau der Gemälde an (Der Christus des heiligen Johannes vom Kreuz - 1951).

Beschäftigte Escher mit zunehmendem Alter die Annäherung an die Unendlichkeit, so suchte Dalí nach Wegen zur Erlangung der Unsterblichkeit - der vierten Dimension. Ein Weg führt über die Erweiterung der Malerei auf die

dritte Dimension. Eine Zeitlang erzeugt er Hologramme, später vor allem stereoskopische Werke.

## **M.C. Escher**

(1898-1972)

Indem ich auf sinnliche Weise den Rätseln, die uns umgeben, aufgeschlossen gegenüberstehe und meine Beobachtungen überdenke und analysiere, komme ich mit dem Gebiet der Mathematik in Berührung. Obwohl ich über keinerlei exakt-wissenschaftliche Ausbildung und Kenntnisse verfüge, fühle ich mich oft mehr mit Mathematikern als mit meinen eigenen Berufskollegen verwandt. (M. C. Escher, "Grafiek en Tekeningen", 1960)

Das Werk des niederländischen Graphikers Maurits Cornelis Escher umfasst vier Perioden:

1. Landschaften
2. Metamorphosen
3. perspektivische Bilder
4. Annäherung an die Unendlichkeit

In die dritte Periode fällt auch seine Beschäftigung mit schlichten Raumfiguren: Spiralen, Moebiusbändern und regelmäßigen Polyedern. Das erste Bild war Kristall, Sterne der Höhepunkt. Später verwendete er diese Figuren als gelegentliche Verzierung (Wasserfall).

Escher faszinierte die Ordnung und Schönheit natürlicher Kristallformen. Gleiche Interessen hatte sein Bruder. Der Professor für Geologie B.G. Escher schrieb ein Standardwerk über Mineralogie und Kristallographie.

## **Platonische Körper in der Natur**

Auch in der **Natur** können sich vorhandene Regelmäßigkeiten als platonische Körper ausprägen.

Tetraeder, Kubus und Oktaeder kommen in der Natur als (idealisierte) **Kristalle** vor; dodekaedrische und ikosaedrische Symmetrieelemente finden sich bei Quasikristallen.

Exakte Dodekaeder kommen nicht als Kristalle vor. Kristalle bestimmter Mineralien, wie z.B. Pyrit, die äußerlich wie ein Dodekaeder aussehen, sind keine exakten Pentagondodekaeder, sondern verzerrt. Allerdings ist die Verzerrung mit dem bloßen Auge aus der Entfernung oft nicht wahrzunehmen.

Aus der Nähe betrachtet erkennt man jedoch, dass diese Körper nicht aus regelmäßigen (sondern unregelmäßigen) Fünfecken geformt sind.

Zum Beispiel bilden Natriumchlorid und Alaun, das beim Ausfällen mit gewissen anderen Stoffen dotiert ist, Kubuskristalle. Reines Alaun kristallisiert als Oktaeder.

Dabei ist die Abgrenzung zwischen den einzelnen Formen nicht absolut, sondern die interne Symmetrie kann sich in unterschiedlichen Ausprägungen äußern. In der Mineralogie fallen alle die platonischen Körper, Tetraeder, Kubus und Oktaeder; sowie Rhombendodekaeder, Kuboktaeder und ihre Mischformen; unter den Begriff kubisch. Nicht wenige Mineralien können dementsprechend mehrere dieser kubischen Formen annehmen. Dazu gehört zum Beispiel Pyrit, das sowohl als Kubus als auch als Oktaeder, oder wie oben beschrieben als verzerrtes Dodekaeder, vorkommt.

Platonische Körper, im speziellen das Ikosaeder, sind sehr häufig Strukturformen, wie sie bei Clustern (also kleinen **Nanoteilchen**) beobachtet werden.

Tetrahedran, Dodekahedran und Cuban sind **organische Moleküle**.

## Plankton

Zum Plankton (griech. Umherirrendes) gehören im Wasser lebende Tiere, Pflanzen und Mikroorganismen, die von Strömungen mitgetragen werden, sogenannte **Radiolarien** (Strahlentierchen).

Ernst Haeckel (1834-1919) studierte diese einzelligen Meerestiere, die Teil des Planktons sind. Viele ihrer formenreichen aus Kieselsäure bestehenden Skelette sind symmetrisch. Auch Salvador Dalí zeichnete sie.

Einige weisen regelmäßige *Kubus-, Oktaeder-, Dodekaeder- oder Ikosaederformen* auf.

## Alge *Braarudosphaera bigelowi*

Algen stellen einen Großteil der Biomasse unseres Planeten dar. Sie sind Ernährungsgrundlage für Wassertiere und wichtig für die Selbstreinigung der Gewässer. Die im Ozean lebende einzellige, goldbraune Alge *Braarudosphaera bigelowi* bildet zeitweise ein Gerüst aus Calcitkristallen ( $\text{CaCO}_3$ ). Dieses Gerüst - die Coccospäre - besteht aus zwölf fünfeckigen Platten und ist ein fast perfektes *Dodekaeder*.

## Woraus besteht die Welt?

mochten die alten Griechen gefragt haben.

Aus nichts wird nichts, befand Parmenides (ca. 514 - 445 v. Chr.). Also kann das Seiende weder entstanden sein, noch kann es vergehen.

Doch es gibt Entstehen und Vergehen in der Welt, ständig, überall. Kein Entstehen aus dem Nichts, kein Vergehen zu Nichts. Es sind die Elemente, selbst unveränderlich und beständig, die sich mischend und entmischend die Dinge bilden. Empedokles nennt "Feuer, Wasser, Erde und der Luft unendliche

Höhe". Liebe und Hass, Anziehung und Abstoßung sind die Urkräfte. So wie sie uns bewegen, muss es auch bei den Elementen sein.

Ähnliche Gedanken entwickeln Leukipp (um 450 v. Chr.) und Demokrit (460-371 v. Chr.): es gibt kleinste, unteilbare Teilchen - die Atome. Nach Demokrit zeichnen sie allein geometrische, keine physikalischen Eigenschaften aus. Wie bei Buchstaben kommt es auf ihre Gestalt, ihre Anordnung und Lage an. Diese Eigenschaften bestimmen Zusammensetzung und Qualitäten der Stoffe.

Platon schließlich vereinigte sowohl dem Atomismus als auch Empedokles nahe stehende Gedanken mit den Ideen der Pythagoräer. **Für Platon gibt es einen Grundstoff ohne spezielle Qualität, der die Formen der regelmäßigen Körper annehmen kann.** Die Unterschiedlichkeit dieser geometrischen Formen ist es, die die Unterschiedlichkeit der Elemente begründet. Für Platon sind die Elementarteilchen nicht unteilbar.

# Teil II

## Menschenkundliche Grundgedanken

### zur Entwicklung der Schüler des 8. Schuljahres und der daher empfohlenen pädagogisch-didaktischen Unterrichtsmethoden

Die Schüler einer 8. Klasse sind vornehmlich 14 oder 15 Jahre alt. Sie befinden sich in der Pubertät, die sie stärker oder weniger stark ausgeprägt in ihren wechselhaften Gefühlen und Fragen ans Leben beschäftigt. Ihre Haltung zu sich selbst und zur Welt wandelt sich grundlegend. Sie stehen zwischen dem „Kind sein“ und dem „erwachsen werden“. Äußere, körperliche Veränderungen, ein oft verstärktes Längenwachstum und die Ausgestaltung der äußeren Geschlechtsmerkmale gehen mit inneren Verwandlungen einher und können den Heranwachsenden und auch seine Umgebung verunsichern.

Tobias Richter führt dazu aus: „Oft erschreckt ja die tumultartige Wucht der Ereignisse die Umgebung so, dass sie darüber vergisst, dass der Jugendliche ähnlich erschrocken ist. Dieses Erschrecken, das für ihn sehr tief und erschütternd sein kann, soll aber von der Umgebung unbemerkt bleiben, da er sich in diesem Neuland erst dann als Individualität zeigen möchte, wenn er Sicherheit erworben hat. Davor bleibt vieles versteckt, Verzauberung und Maske.“<sup>1</sup>

Neben dem körperlichen und seelisch-gefühlsmäßigen Wandel vollzieht sich im pubertierenden Jugendlichen auch ein geistiger, ein Wandel des Bewusstseins. „In verstärktem Masse beginnt sich nun das begriffliche Denken zu entwickeln, das bestrebt ist, Bezüge zwischen Einzelercheinungen herzustellen, und damit aus der Vereinzelung, aus der Einsamkeit nach einer neuen Totalität greifen möchte.“ schreibt Tobias Richter. Das begründet die methodisch-didaktischen Unterrichtsempfehlungen von P. Buck und M. v. Mackensen die empfehlen: „Alles Erlebte muss in ursprüngliches Denken hinauf gehoben werden, sonst stumpft es ab und erzeugt nur Sensationslust. Nicht Strukturen und Ergebnisse der Fachwissenschaft sollen gepflegt werden, wohl aber die Grundfigur wissenschaftlichen Tuns: das zusammenschauende Denken“.<sup>2</sup>

Auch Steiner sagte dazu grundlegend: „Nicht der Abstrakte Begriff enthält die Wirklichkeit, wohl aber die denkende Beobachtung, die weder einseitig den Begriff noch die Wahrnehmung für sich betrachtet, sondern den Zusammenhang beider.“<sup>3</sup> Auf diese Weise lässt sich die Entwicklung der im achten Schuljahr befindlichen Schüler aufgreifen und zur ersten Reife des Zusammenhänge erkennenden, denkenden Beobachtens führen. Richter resümiert: „Ein nach streng phänomenologischer Methode durchgeführter

---

<sup>1</sup> Tobias Richter, „Pädagogischer Auftrag und Unterrichtsziele – vom Lehrplan der Waldorfschule“, S. 60, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 2003

<sup>2</sup> P. Buck, M. v. Mackensen, „Naturphänomene erleben und verstehen“, S. 22

<sup>3</sup> Rudolf Steiner, „Die Philosophie der Freiheit“, GA 4, Dornach 1967, S. 197

Anschauungsunterricht bietet hierfür durch das Erlernen forschenden Fragens einzigartige Möglichkeiten.“

## Der Geometrieunterricht in der 8. Klasse

Die Geometrie als Teil der Mathematik wird in der Waldorfschule in gesonderten Epochen unterrichtet. In der 8. Klasse soll im Geometrieunterricht u. a. „das erlebnismäßige Kennenlernen des goldenen Schnittes im Zusammenhang mit den platonischen Körpern“<sup>4</sup> unterrichtet werden.

Als generellen Apel Rudolf Steiners zum Unterrichtsziel des Geometrieunterrichts seien folgende zwei Zitate vorangestellt: „Es dürfen bei uns - in der Waldorfschule – die Lehrer nicht zufrieden sein, wenn die Kinder einen Kreis zeichnen können, sondern es müssen unsere Kinder den Kreis, das Dreieck, das Quadrat fühlen lernen. Sie müssen den Kreis so zeichnen, dass sie das Runde in der Empfindung haben. (...) Eine gefühlsmäßige Anschauungsweise soll es haben, ein gefühlsmäßiges Erleben der Dinge.“<sup>5</sup> „Können wir uns aber jedes Dreieck vorstellen? Es wäre gut, wenn wir unseren Kindern einen beweglichen Begriff des Dreiecks beibrächten, nicht einen toten.“<sup>6</sup>

Über den Geometrieunterricht in der 6. bis 8. Klasse schreibt Tobias Richter: „In der Geometrie ergibt sich die ästhetische Qualität des Zeichnens nun nicht mehr aus der Dynamik, sondern aus der Ordnung. Hierzu muss der Schüler den sachgemäßen Gebrauch von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck gründlich üben.“ Damit die Geometrie dadurch aber nicht als zu starr erlebt wird, soll der Lehrer die Schüler immer wieder zum Staunen bringen damit seelisches Interesse und Geist gleichermaßen angesprochen werden, sich ergänzen und so die Entwicklung des Zusammenhänge erkennenden, denkenden Beobachtens unterstützen. Unterrichtsziel ist es aber auch die Entwicklung des Jugendlichen hin zu einer ordentlich, klar und frei denkenden Persönlichkeit zu unterstützen. So sagt Tobias Richter: „Geometrische Beweise zu entdecken bzw. diese im gemeinsamen Gespräch zu entwickeln regen das erwachende kausale Denken nicht nur an, sondern sind ihm Nahrung sowie Prüfstein. Die Formulierung der Beweise und Gesetze verlangt eine eigene, dem Gegenstand adäquate Form der Sprache. Eine solche zu erleben und handhaben zu lernen, die frei von Emotionalität ist und sich nur auf das, was ist, und nicht auf das, was sein soll, bezieht, ist für die Schüler auf der Suche nach ihrer individuellen Sprache und Ausdrucksform wichtig.“<sup>7</sup> Oder auch: „Wiederholendes und ständiges Üben von gezeichneten Beweisen ist Schulung der sich entwickelnden Urteilsfähigkeit und des Willens. (...) Im Geometrieunterricht soll der Schüler zunehmend zu exakten Urteilen und Begriffen kommen.“<sup>8</sup>

---

<sup>4</sup> Tobias Richter, „Pädagogischer Auftrag und Unterrichtsziele – vom Lehrplan der Waldorfschule“, S. 302, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 2003

<sup>5</sup> Rudolf Steiner, Basel 1920, 6.Vortrag

<sup>6</sup> R. Steiner, GA 301, Seite 213

<sup>7</sup> Tobias Richter, „Pädagogischer Auftrag und Unterrichtsziele – vom Lehrplan der Waldorfschule“, S. 299, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 2003

<sup>8</sup> ebenda, S. 66

Steiner sagte dazu, noch in der Planungsphase der ersten Waldorfschule, die bis dato nur bis zur 8. Klasse geplant war: „Wenn sie das Kind entlassen aus der Schule, so müssen Sie in ihm die Fähigkeit veranlagt haben, nicht mehr mit allen Fibern der Seele im Leibe drinnen zu stecken, unabhängig geworden zu sein in Bezug auf Denken, Fühlen und Wollen vom Leibe.“<sup>9</sup> Das kann durch die Hinführung vom direkten, „handgreiflichen“ Gestalten platonischer Körper unter körperlichem und seelischem Einsatz, über das Betrachten und Erlernen forschenden Fragens, hin zum zunehmend abstrakteren, denkerischen Vorstellen und Beschreiben der Formen geschehen.

---

<sup>9</sup> Rudolf Steiner, „Erziehungskunst. Methodisch-Didaktisches“, GA 294, Dornach 1990, Vortrag vom 5.9.1960

# Teil III

## Skizzenhafte Planung einer 3-wöchigen Geometrieunterrichtsepoche in der 8. Klasse Zum Thema „Platonische Formen“

Drei Wochen Hauptunterrichtszeit von 8 bis 9:45 Uhr

### 1. Woche

- Gedicht „Sonett des Luca Pacioli“
- Aus der Anschauung platonischer Körper in der Natur kommend in die Konstruktion derselben gehen
- Mineralien usw. betrachten die platonische Formen inne haben
- gemeinsam aus Stäben platonische Körper konstruieren
- Raumaufteilung über die 3 Dimensionen hinausgehend thematisieren
- einzeln platonische Körper aus Ton plastizieren
- Definieren „Was sind platonische Körper?“
- Wie viele platonische Körper gibt es – konstruktiv und mathematisch lösen (Winkelbetrachtung)
- In- und Umkugel
- Exkursion ins Mineralienmuseum
- Geschichte der platonischen Körper bis Platon
- Elemente zuordnen
- Dualitätsgesetz (auch bauen mir Metallröhrchen)

### 2. Woche

- Gesetzmäßigkeiten der platonischen Körper beobachten, analysieren, formulieren
- Der Euler'sche Polyedersatz  $E + F - K = 2$
- archimedische Körper plastizieren, Übergänge in verschiedenen Sortierungen aufstellen
- Einbeschreibung
- platonische Körper aus Metallröhrchen und Draht bauen (Dualitätsgesetz auch bauen?).

- Platonische Körper in der Kunst von Leonardo da Vinci und Dalí betrachten und beschreiben

### 3. Woche

- Gedicht „Wenn nicht mehr Zahlen und Figuren“
- Goldener Schnitt im Ikosaeder, anhand von Holzmodell der dreidimensional geschnittenen Flächen mit Ton ausgestalten
- Konstruktion des goldenen Schnittes mit Zirkel und Lineal
- Netzaufwicklungen mit Zirkel und Lineal konstruieren und zu platonischen Körpern zusammenbauen, besonders Interessierte können auch Netzaufwicklungen in die zweite Rekursionstiefe gehend bauen
- Johannes Keplers Planetenmodell vorstellen
- M. C. Eschers Beschäftigung mit platonischen Körpern vorstellen, betrachten, beschreiben

### 1. Tag:

Gedicht: „Sonett des Luca Pacioli“ rezitieren beginnen.

#### **Woraus ist die (materielle) Welt geformt?**

Platon schon stellte sich diese Frage vor ca. 2308 Jahren (Er lebte um 300 v. Chr.). Und heute noch fragen sich Wissenschaftler unterschiedlicher Fachrichtungen wie der Chemie, Astronomie, Kernphysik etc. dieselbe, alte Frage. Im Laufe der Zeit hat sich die Suche nach der Antwort zwar verändert und auch die Erwartungen an die Antwort haben sich gewandelt, die Frage an sich aber ist gleich geblieben: Woraus ist die materielle Welt geformt? Welche Formen sind die Grundformen, die Urformen aus denen die Dinge in der Welt aufgebaut sind?

#### **Grundsortierung als Wahrnehmungsübung und um auf das hinterfragende Beobachten hinzuleiten**

Die Epoche könnte damit beginnen, dass den Schülern eine Auswahl verschiedener Polyeder präsentiert werden, darunter platonische Körper, archimedische Körper, irgendwie gemischte Polyeder, Sterne usw.

Das können Modelle aus Ton, Stein, Metall, Papier oder Edelsteine sein, auch ein klassischer Fußball könnte dabei liegen.

Die Körper sollen betrachtet werden und anhand ihrer Formen (nicht Materialien oder Farben!) zu Gruppen sortiert werden die logisch Begründet werden müssen.

Wenn die Sortierung abgeschlossen ist sollen die dafür benutzten Kriterien genannt, überprüft und notiert werden.

Diese Übung kann in der Klasse oder in kleineren Gruppen durchgeführt werden. Benötigt werden lediglich hinreichend viele Körper.

**Frage:** Kennen die Schüler platonische Formen die in der Natur oder in anderen Zusammenhängen vorkommen? Können Sie sich vorstellen wo, in welchen Bereichen sie vorkommen könnten? (z. B. als Strukturgeber in Materialien/Substanzen)

**Plastizieren** des ersten platonischen Körpers: **Kubus**

## 2. Tag:

Gedicht: „Sonett des Luca Pacioli“ rezitieren.

Mit **Stangen** (Besenstilen/Eurythmiestäben) werden ein Kubus und ein Oktaeder im Raum konstruiert. Die Schüler halten die Stangen und haben ein direktes Gefühl für den entstehenden Körper, seine Raumqualität und Stabilität. Drehen und Wenden des Körpers im Raum. Nachvollziehen – wie viele Stangen wurden benötigt – wie viele Kanten hat der Körper, wie viele Ecken und wie viele Flächen. Wie verhält er sich im Raum? Wie viele „Dimensionen“ hat er. Wie stehen Kubus und Oktaeder zu einander? Wie groß wäre die Inkugel/Umkugel?

Notieren der Beobachtungsergebnisse an der Tafel.

**Beginn: Geschichtlicher Umriss über die platonischen Körper** von den **Schottischen Steinbällen** anfangen (Bilder!). Schüler raten und rätseln lassen wozu die alten Schotten sie hergestellt haben.

**Namen** erläutern und notieren: „Poly“-„eder“, „Okta“-eder...

**Plastizieren** des zweiten platonischen Körpers: **Oktaeder**

## 3. Tag:

Gedicht: „Sonett des Luca Pacioli“ rezitieren.

Mit **Stangen** (Besenstielen/Eurythmiestäben) werden ein Kubus und ein Oktaeder, als auch ein **Tetraeder** im Raum konstruiert. Die Übung wird wie am Tag zuvor ausgewertet.

**Definieren** „Was sind platonische Körper?“ Notieren, einmal gemeinsam in eigenen Worten und einmal geometrisch korrekt ausgedrückt.

**Wie viele platonische Körper gibt es** – erst konstruktiv lösen (Winkelbetrachtung), dann mathematisch (Teil 1)

**Geschichtlicher Umriss über die platonischen Körper** über den „**Römischen Dodekaeder**“ (Bild). Schüler raten und rätseln lassen wozu die Römer das Dodekaeder hergestellt haben.

**Plastizieren** des dritten platonischen Körpers: **Tetraeder** (mit versetzten Händen)

#### 4. Tag:

Mit **Stangen** (Besenstielen/Eurythmiestäben) wird ein **Dodekaeder** im Raum konstruiert. Die Übung wird wie am Tag zuvor ausgewertet. (Achtung: Instabil)

**Wie viele platonische Körper gibt es** – erst konstruktiv lösen (Winkelbetrachtung), dann mathematisch (Teil 2)

**Geschichtlicher Umriss über die platonischen Körper** von den **Pythagoräern** über **Theaitetos** bis Platon.

Platon hat den platonischen Körpern **Elemente** zugeordnet. Gemeinsam versuchen die Zuordnung herauszufinden. Notieren.

- Feuer: Tetraeder
- Wasser: Ikosaeder
- Luft: Oktaeder
- Erde: Kubus
- Weltall oder später hinzugefügtes "fünftes" Element Äther / Quintessenz oder Geist: Dodekaeder

**Plastizieren** des vierten platonischen Körpers: **Dodekaeder** (oben und unten an Kugel ein Fingerabdruck. Dann versetzt von oben und unten fünf Fingerabdrücke als Quellpunkte der Flächen anlegen...)

#### 5. Tag:

Mit **Stangen** (Besenstielen/Eurythmiestäben) wird ein Ikosaeder, dann ein Dodekaeder im Raum konstruiert. Vergleich Ikosaeder und Dodekaeder. Die Übung wird wie am Tag zuvor ausgewertet.

**Dualitätsgesetz** erarbeiten, selbst formulieren.

**Geschichtlicher Überblick bis Euklid** – denn der hat begründet warum es höchstens fünf platonische Körper geben kann.

**Plastizieren** des fünften platonischen Körpers: **Ikosaeder** (wer sich wagt)

## 2. Woche, 1. Tag:

Gedicht: „Sonett des Luca Pacioli“ rezitieren.

### **Einführen „The Korean Numbergame“ :**

Eine Gruppe Schüler steht im Kreis. Es wird rechtsherum im Kreis durchgezählt von 1 bis 100 so dass jeder Schüler eine Zahl sagt, der rechter Nachbar die nächste usw. Nun bekommt eine Zahlengruppen ein Kriterium zugeschrieben, so z.B. muss man bei jeder 6. Zahl schweigen und stattdessen einmal klatschen. Die Sechserreihe wird also ausgespart und geklatscht. Wer einen Fehler macht fliegt raus. Gewonnen hat der letzte der übrig bleibt.

**Erinnern:** Was haben wir letzte Woche gemacht?

**Gesetzmäßigkeiten** der platonischen Körper zueinander anhand der plastizierten Formen und evtl. unter Zuhilfenahme der Stäbe beobachten, analysieren, formulieren, notieren.

Den **Euler'sche Polyedersatz**  $E + F - K = 2$  dabei herausarbeiten.

## 2. Woche, 2. Tag:

Gedicht: „Sonett des Luca Pacioli“ rezitieren.

### **„The Korean Numbergame“**

wie am Tag zuvor bis es gut sitzt.

**Archimedische Körper plastizieren**, zunächst vom Tetraeder ausgehend und die Ecken des Tetraeders abstumpfen. Ergebnisse in mehreren Stadien stehen lassen. Dann zusammen mit den fertigen Tetraedern der letzten Woche betrachten. Was ist passiert? Warum ist das passiert? Der Tetraeder ist selbstdual.

## 2. Woche, 3. Tag:

Gedicht: „Sonett des Luca Pacioli“ rezitieren.

### **Ausbauen „The Korean Numbergame“ :**

Eine Runde wird so gespielt wie am Tag zuvor, mit nur einer Zahlengruppe. Wenn man wieder im Spielfluss ist wird eine neue Variante dazu genommen – eine zweite Zahlengruppe die nun geschnipst werden soll. Also wird durchgezählt und die Sechserreihe wird geklatsch und z.B. die Achterreihe wird geschnipst.

**Archimedische Körper plastizieren**, vom Kubus (Kubus) ausgehend zum Kuboktaeder und einige Schüler weiter bis aus den neuen Ecken neue Kanten entstehen. Ergebnisse in Reihe/Kreis mit Polen aufstellen: Kubus – Abgestumpfter Kubus - Kuboktaeder – abgestumpfter Oktaeder - Oktaeder

Besprechen: Was wird woraus? Wie passiert das? Warum kommt da ein Mittelding zwischen Kubus und Oktaeder heraus? Dual zueinander! Kann man sich das vorstellen? Denken? Vorstellungsübung machen.

## 2. Woche, 4. Tag:

Gedicht: „Sonett des Luca Pacioli“ rezitieren.

„**The Korean Numbergame**“  
wie am Tag zuvor bis es gut sitzt.

Als **Vorstellungsübung die Ecken eines Dodekaeders abstumpfen**. Was passiert? Als **Vorstellungsübung die Ecken eines Ikosaeders abstumpfen**. Was passiert?

Mit den Stücken einen Ikosaeder in einem Dodekaeder halten und andersherum.

Vielleicht einem getrockneten Tondodekaeder und einem Tonikosaeder mit Hilfe von Schleifpapier auf Brettchen die Ecken abschleifen.

**Platonische Körper aus Metallröhrchen und Draht bauen**  
Dualitätsgesetz (auch bauen mir Metallröhrchen)  
Teil 1

Platonische Körper in der **Kunst von Leonardo da Vinci** betrachten und beschreiben

## 2. Woche, 5. Tag:

Gedicht: „Sonett des Luca Pacioli“ rezitieren.

„**The Korean Numbergame**“  
wie am Tag zuvor bis es gut sitzt.

**Einbeschreibung** – wie können sonst noch platonische Körper in einander stecken oder aus einander entwickelt werden?

**Platonische Körper aus Metallröhrchen und Draht bauen**  
Dualitätsgesetz (auch bauen mir Metallröhrchen)  
Teil 2

Platonische Körper in der **Kunst von Dalí** betrachten und beschreiben.

### 3. Woche, 1. Tag:

Gedicht: „Wenn nicht mehr Zahlen und Figuren“ rezitieren.

Wenn nicht mehr Zahlen und Figuren  
Sind Schlüssel aller Kreaturen  
Wenn die so singen, oder küssen,  
Mehr als die Tiefgelehrten wissen,  
Wenn sich die Welt ins freie Leben  
Und in die Welt wird zurück begeben,  
Wenn dann sich wieder Licht und Schatten  
Zu echter Klarheit wieder gatten,  
Und man in Märchen und Gedichten  
Erkennt die wahren Weltgeschichten,  
Dann fliegt vor einem geheimen Wort  
Das ganze verkehrte Wesen fort.  
(Novalis)

Wenn nicht mehr Zahlen und Figuren ist ein Gedicht von Novalis (Georg Friedrich Philipp Freiherr von Hardenberg) aus dem Jahr 1800. Noch 1798 hatte Novalis in seinem „Monolog“ den Zauber von mathematischen Formeln gerühmt:

„Wenn man den Leuten nur begreiflich machen könnte, dass es mit der Sprache wie mit den mathematischen Formeln sei - Sie machen eine Welt für sich aus - Sie spielen nur mit sich selbst, drücken nichts als ihre wunderbare Natur aus, und eben darum sind sie so ausdrucksvoll --- eben darum spiegelt sich in ihnen das Verhältnisspiel der Dinge.“

In diesem Gedicht misstraut Novalis jedoch den „Tiefgelehrten“ und findet den Schlüssel zum Verständnis der Welt bei den Sängern und den Liebenden.

Ich denke es ist der Spannung des Alters der Achtklässler angemessen ihre möglicherweise „pubertäre Zerrissenheit“ zwischen überschwänglicher Gefühlswelt und aufkeimendem Sinn für objektive Strukturen und ihrer Sehnsucht nach unwiderlegbare Wahrheiten (wie die der Mathematik und Geometrie) durch die Rezitation dieses Gedichtes humorvoll und verständlich aufzugreifen.

**„The Korean Numbergame“**  
wie am Tag zuvor bis es gut sitzt.

**Erinnern:** Was haben wir letzte Woche gemacht?

**Goldener Schnitt im Ikosaeder**, anhand von Holzmodell der dreidimensional geschnittenen Flächen (gedanklich) mit Ton ausgestalten.

**Konstruktion des goldenen Schnittes mit Zirkel und Lineal** lernen und üben.

Evtl. den goldenen Schnitt komplett weglassen und eher das Konstruieren von Dreiecken, Vierecken, Fünfecken mit Zirkel und Lineal einführen und üben.

### 3. Woche, 2. Tag:

Gedicht „Wenn nicht mehr Zahlen und Figuren“

#### „The Korean Numbergame“ :

Eine Runde wird so gespielt wie am ersten Tag, eine Runde wie am Tag zuvor. So oft und lange bis das Spiel sitzt. Nun wird die Sechserreihe geklatscht, die Achterreihe geschnipst und die Zahlen die auch in die Zwölferreihe gehören werden geklatscht und dabei geht man einmal in die Knie.

So können die Zahlenverhältnisse der platonischen Formen spielerisch aufgegriffen werden, denn der Kubus hat 8 Ecken, 6 Flächen und 12 Kanten. Das Oktaeder hat 6 Ecken, 8 Flächen und auch 12 Kanten, usw.

**Netzabwicklungen** mit Zirkel und Lineal konstruieren und zu platonischen Körpern zusammenbauen.

### 3. Woche, 3. Tag:

Gedicht „Wenn nicht mehr Zahlen und Figuren“

#### „The Korean Numbergame“

wie am Tag zuvor bis es gut sitzt.

**Netzabwicklungen** mit Zirkel und Lineal konstruieren und zu platonischen Körpern zusammenbauen.

### 3. Woche, 4. Tag:

Gedicht „Wenn nicht mehr Zahlen und Figuren“

#### „The Korean Numbergame“

wie am Tag zuvor bis es gut sitzt.

**Johannes Keplers Planetenmodell** vorstellen (Bild). Nicht mehr aktuell.

**Netzabwicklungen** mit Zirkel und Lineal konstruieren und zu platonischen Körpern zusammenbauen.

### 3. Woche, 5. Tag:

Gedicht „Wenn nicht mehr Zahlen und Figuren“

#### „The Korean Numbergame“

Jetzt mal in der Version von Dodekaeder und Ikosaeder: 12, 20, 30

**Netzabwicklungen** mit Zirkel und Lineal konstruieren und zu platonischen Körpern zusammenbauen, besonders Interessierte können auch Netzabwicklungen in die zweite Rekursionstiefe gehend bauen, oder auch Netzabwicklungen von Schnittkörpern bauen, beispielsweise Kubus und Oktaeder.

**M. C. Eschers** Beschäftigung mit platonischen Körpern vorstellen, betrachten, beschreiben.

Zusammenfassung der Epoche.

### FAZIT

In dieser Geometrieepoche soll den Schülern ein generelles Verständnis für dreidimensionale Formen, speziell für die platonischen und die archimedischen Körper vermittelt werden und das räumliche Vorstellungsvermögen soll vom Anfassen bis hin zum plastischen Vorstellen geübt werden, so dass ein bewegliches Denken in den Schülern angelegt ist.

Auch soll aus der Epoche hervorgehen, wie die dreidimensionalen Formen der Welt mit der Geometrie und Mathematik zusammenhängen und wie sich das Verständnis dieses Zusammenhanges historisch entwickelt hat und auch in der Zukunft weiterhin benutzt werden kann.